Zusammenfassung

Die Fisher Gleichung

Geldtheorie und Geldpolitik

Wintersemester, 2011/12

1 Die Fisher Gleichung

Die Unterscheidung zwischen nominalen und realen Größen verändert das Problem der optimalen intertemporale Enscheidung. Transaktionen am Kreditmarkt finden in der Regel in nominalen Einheiten statt - Wertpapiere und Zinszahlungen werden in Geldeinheiten bewertet.

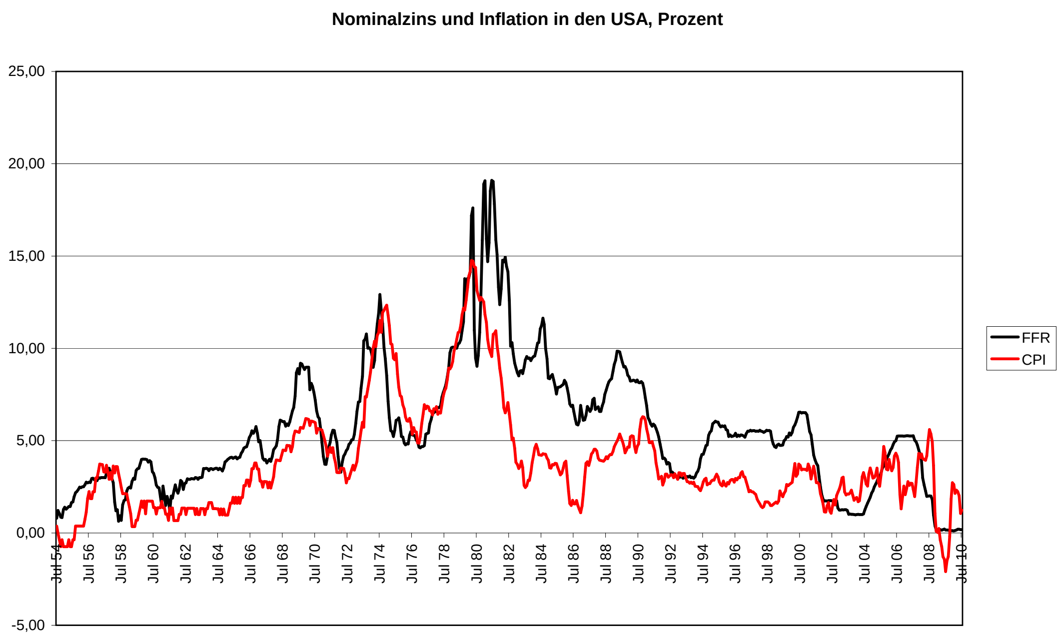

Figure 1: Nominalzinsen und realisierte Inflation bewegen sich sehr ähnlich. Seit den 70er Jahren sind die Nominalzinsen in den USA deutlich gefallen.

Haushalte legen ihren Entscheidungen nicht nominale Zahlungen sondern realen Güterströme zugrunde. Das Konzept des Realzinses r_t bezieht sich auf das reale Einkommen aus einer Investition in einen Vermögensgegenstand K

$$(1 + r_t)K = (1 + i_t)K\frac{P_t}{P^e_{t+1}}$$

daraus folgt die Fisher Gleichung

$$1 + i_t = (1 + r_t)(1 + \pi^e_{t+1})$$

Der Nominalzinz i_t setzt sich aus zwei Komponenten zusammen

- dem realen Güterstrom r_t den ein Haushalt für einen Kredit (d.h. den Verzicht auf heutigen Konsum) fordert und
- einer Kompensation für den erwartetetn Wertverlust des nominalen Kredits die der erwarteten Inflationsrate π^e_{t+1} entspricht.

1.1 Wie lässt sich der Realzins ermitteln?

Der Nominalzins lässt sich am Markt beobachten. Der Realzins lässt sich daraus jedoch nicht direkt ablesen da die Inflationserwartungen der Haushalte nicht bekannt sind.

- **Indexierte Anleihen.** Viele Staaten (z.B. Deutschland, Frankreich, USA, UK) emittieren inflationsindexierte Anleihen bei denen die Zahlung eines Realzinses vereinbart ist. Unter der Annahme rationaler Märkte lässt sich aus der Zinsdifferenz von indizierten und nicht-indizierten Anleihen die Inflationserwartung ablesen.
- **Berechnung der Inflationserwartung.** Eine alternative Lösung ist das Aufstellen eines Erwartungsmodells, das aus historischen Inflationsdaten Prognosen erstellt, Beispiele:
  1. perfekte Vorraussicht, die Inflationsrate der Folgeperiode ist bekannt
  2. einfache adaptive Erwartungen, die Inflationsrate der laufenden Periode wird auch für die Folgeperiode erwartet
  3. statistisches Inflationsmodell, auf Basis aller in der laufenden Periode verfügbaren informationen wird eine bedingte Erwartung der Inflationsrate für die Folgeperiode gebildet

1.2 Kurs/Renditen börsennotierter Bundeswertpapiere vom 18.10.2010

Bezeichnung	Fälligkeit	Restlaufzeit	Volumen; Mrd. Euro	Kurs	Rendite	Netto-Rendite	Kurs plus Stückzinseffekt
2,250 BSA 08	10.12.2010	0/1	14,0	100,230	0,59	0,44	102,166
5,250 BUND 00 II	04.01.2011	0/2	23,3	100,975	0,54	0,40	105,132
3,500 BO S 149	14.10.2011	0/11	17,0	102,655	0,78	0,57	102,713
1,250 BSA 09 III	16.12.2011	1/2	18,0	100,555	0,77	0,56	101,699
4,250 BO S 151	12.10.2012	1/11	16,0	106,635	0,85	0,63	106,728
4,500 BUND	04.01.2013	2/2	24,0	107,890	0,88	0,64	111,453
2,500 BO S 155	10.10.2014	3/11	17,0	104,810	1,25	0,92	104,878
3,750 BUND 04	04.01.2015	4/2	23,0	109,810	1,34	0,97	112,779
1,750 BO S 158	09.10.2015	4/11	6,0	101,215	1,49	1,10	101,340
3,500 BUND 05	04.01.2016	5/2	23,0	109,500	1,58	1,16	112,271
1,500 BUND 06 INDEX	15.04.2016	5/6	15,0	107,350	0,15		108,123
6,000 BUND 86 II	20.06.2016	5/8	3,8	123,000	1,70	1,23	125,005
3,250 BUND 09	04.01.2020	9/2	22,0	107,650	2,32	1,69	110,686
1,750 BUND 09 INDEX	15.04.2020	9/6	11,0	110,400	0,62		111,301
3,000 BUND 10	04.07.2020	9/8	22,0	105,540	2,35	1,72	106,962
5,500 BUND 00	04.01.2031	20/2	17,0	136,980	3,03	2,16	141,335
4,750 BUND 08	04.07.2040	29/8	16,0	133,920	3,01	2,16	135,325

Auswahl, Quelle: http://www.deutsche-finanzagentur.de

Auf der Seite der Bundesbank[1] findet man aktuelle Kurse börsennotierter Bundeswertpapiere. Betrachtet man z.B. die Kurse Anfang Oktober 2011, erkennt man dass sich die Renditen von Tag zu Tag durchaus unterscheiden können.

[1] `http://www.bundesbank.de/kredit/kredit_kurse.php`

1.3 Der realen Zinsatzes und die Konsum Euler-Gleichung

Wir haben die optimale Konsumentscheidung bereits kennengelernt. Wir betrachten einen repräsentativen Haushalt mit unendlicher Lebenserwartung und der Nutzenfunktion

$$U = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s u(C_{t+s})$$

Wir nehmen an, das der Haushalt in jeder Periode über ein Einkommen Y_t verfügt. Der Haushalt maximiert seinen diskontierten Nutzenstrom aus Konsum und hat die Möglichkeit mit Hilfe von Schuldtiteln zum Realzins r_t Kredite aufzunehmen oder zu sparen. Die Budgetrestriktion des Haushalts ist gegeben durch

$$B_t + Y_t = C_t + \frac{B_{t+1}}{1+r_t} \tag{1}$$

daraus folgt das Lagrange Problem

$$L_t = \sum_{s=0}^{\infty} \beta^s \left[u(C_{t+s}) + \lambda_{t+s} \left(B_{t+s} + Y_{t+s} - C_{t+s} - \frac{B_{t+1+s}}{1+r_{t+s}} \right) \right]$$

die Bedingungen erster Ordnung lauten

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} - \lambda_t = 0$$

$$\beta(1+r_t) = \frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}$$

$$B_t + Y_t = C_t + \frac{B_{t+1}}{1+r_t} \tag{2}$$

daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = \beta(1+r_t) \frac{\partial u}{\partial C_{t+1}}$$

als die Konsum Euler-Gleichung.

2 Lineare Differenzgleichungen

Eine **lineare autonome Differenzgleichung** hat im Allgemeinen folgende Form

$$x_{t+m} = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + ... + \alpha_m x_{t+m-1}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist eine Folge der Form $\{x_t\}_{t=0,...,\infty}$. Typischerweise hat eine Differenzgleichung unendlich viele Lösungen. Durch hinzufügen einer Anfangs- oder Endbedingung kann die Lösung eindeutig gemacht werden.

Beispiel: Eine Differenzgleichung erster Ordnung

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1} = g(x_{t-1})$$

Ein Gleichgewicht oder STEADY STATE der Differenzgleichung ist ein Fixpunkt von g

$$x_t = g(x_t) = \alpha_0 + \alpha_1 x_t$$

$$x^* = (I - \alpha)^{-1} \alpha_0$$

Wir nennen das Gleichgewicht stabil, wenn das System in der Umgebung vom Gleichgewicht wieder zum Gleichgewicht konvergiert.
Indem wir x^* von beiden Seiten abziehen erhalten wir

$$x_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t-1}$$

$$z_t = x_t - x^* = \alpha_1(x_{t-1} - x^*) = \alpha_1 z_{t-1}$$

wenn $\lim_{t\to\infty} \alpha_1^t = 0$ ist die Lösung stabil. Dies ist genau dann der Fall, wenn alle Eigenwerte von α_1 im Einheitskreis liegen.

Unter einer **linearen nicht-autonomen Differenzgleichung** versteht man eine Gleichung der Form

$$x_{t+m} = \alpha_0(t) + \alpha_1 x_t + ... + \alpha_m x_{t+m-1}$$

Wir betrachten lineare Differenzgleichungen erster Ordnung

$$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \epsilon_t$$

dabei ist ϵ_t ein Schock, der unabhängig von x_t ist. Durch rekursives einsetzen erhalten wir

$$x_t = \alpha_1(\alpha_1 x_{t-2} + \epsilon_t) = \sum_{s=0}^{t} \alpha_1^s \epsilon_{t-s} + \alpha_1^t x_0$$

Beispiel: Die langfristige Budgetrestriktion eines Haushalts

$$B_t + Y_t = C_t + \frac{B_{t+1}}{1 + r_t}$$

3 Die CRRA Nutzenfunktion (constant relative risk aversion)

Literaturhinweise: **Blanchard, Olivier J. and Fischer**, Stanley (1989), *"Lectures on Macroeconomics"*, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.

$$U = u(c_t) = \frac{1}{1-\sigma} C_t^{1-\sigma} \qquad \text{für} \qquad \sigma > 0, \sigma \neq 0$$
$$U = u(c_t) = lnC_t \qquad \text{für} \qquad \sigma = 1$$

Die Substitutionselastizität zwischen zwei beliebigen Zeitpunkten ist konstant $\frac{1}{\sigma}$.

Sofern wir Unsicherheit zulassen entspricht σ dem Koeffizienten der relativen Risikoaversion $-\frac{C\, u_{cc}(c)}{u_c(c)}$, es folgt als Konsum Euler-Gleichung

$$C_t^{-\sigma} = \beta(1 + r_t)C_{t+1}^{-\sigma}$$

3.1 Eine Endowment-Ökonomie

Eine Tauschökonomie mit exogenem Einkommen

$$Y_t = (1+\gamma)^t Y_0 \qquad \gamma \geq 0 \tag{1}$$

Markträumung

$$C_t = Y_t = (1+\gamma)^t Y_0 \tag{2}$$

daraus folgt

$$E\left(\frac{C_{t+1}}{C_t}\right)^{\sigma} = (1+\gamma)^{\sigma} = \beta(1 + r_t) \tag{3}$$

Je höher die Wachstumsrate des realen Einkommens γ, desto höher der reale Zinssatz.