Aufgabe 0.1: Seien A und B Teilmengen einer Menge M. Wir definieren:

- $A^C = \{m \in M \mid m \notin A\}$ heißt das *Komplement* von A in M.
- $A \setminus B = \{m \in M \mid m \in A$ und $m \notin B\}$ heißt die (Mengen-) *Differenz* von A und B.

Zeige: (a) $(A^C)^C = A$; (b) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$; (c) $A \setminus B \subseteq B^C$; (d) $A \setminus B = A \cap B^C$; (e) $(A \setminus B)^C = A^C \cup B$; (f) Falls $A \subseteq B$, dann: $B^C \subseteq A^C$.

Aufgabe 0.2: Stelle folgende Mengen graphisch in einem zwei–dimensionalen Koordinatensystem dar. (Bekanntlich gilt für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$ die Intervalldefinition $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.)
(a) $\{0,1\} \times \{0,3\}$, (b) $\{0,1,2\} \times \{0,3,5\}$, (c) $\{0,1\} \times [0,3]$; (d) $[0,3] \times \{0,1\}$; (e) $\mathbb{R} \times [0,1]$; (f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 5, y \leq 5\}^C$; (g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$.

Aufgabe 0.3: Betrachte die Menge I–dimensionaler Vektoren $s = (s_1, \ldots, s_I) \in \mathbb{R}^I$.
(a) Für $I = 3$ sei die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$u(s) = -s_1^2 + 2s_1 s_2 + 2s_2 s_3^2 - s_3.$$

(i) Sei $\bar{s} = (1,0,0)$. Bestimme die Funktionswerte $u(\bar{s})$, $u(\bar{s}_{-1}, 0)$, $u(\bar{s}_{-2}, 1)$, $u(\bar{s}_{-3}, 2)$.
(ii) Berechne die Ableitung $\partial u(s)/\partial s_3$.
(iii) Sei s_1^* der Wert von s_1, welcher u maximiert. Bestimme s_1^* in Abhängigkeit von s_{-1}.
(b) Die Durchschnittsfunktion $D_I : \mathbb{R}^I \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben durch $D_I(s) = \frac{1}{I}(s_1 + \ldots + s_I)$. Zeige, dass für alle $i = 1, \ldots, I$ gilt:

$$D_I(s) = \frac{1}{I} s_i + \frac{I-1}{I} D_{I-1}(s_{-i}).$$

Aufgabe 0.4: Sei λ ein Parameter aus dem Intervall $[-1, +1]$. Betrachte die Zuordnungsvorschrift, welche jedem λ als Bildpunkt die Lösung $x(\lambda)$ der Gleichung

$$x^2 - \lambda = 0$$

zuordnet. Für welche Werte von λ ist diese Funktion als Funktion von $[-1, +1]$ in $\mathbb{R}$ wohldefiniert?