Aufgabe 4.1 Betrachte den folgenden Wettkampf mit zwei Spielern $i = 1, 2$. Jeder Spieler kann einen Wettkampfeinsatz $s_i \in [0, \infty)$ ausüben. Der Spieler, der (strikt) mehr Einsatz ausübt, gewinnt einen Preis $V > 0$, der andere Spieler gewinnt nichts. Wenn beide Spieler gleich großen Einsatz ausüben, wird der Preis verlost. Die Kosten für Einsatz s_i seien $c(s_i)$, wobei $c(\cdot)$ eine wachsende, stetige Funktion sei mit $c(0) = 0$. Die Einsatzkosten fallen auch dann an, wenn man den Preis nicht gewinnt.

(a) Nimm zunächst an, dass $c(s) = s$. Zeige, dass es ein Nash–Gleichgewicht ist, wenn beide Spieler mit einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, V]$ randomisieren.

(b) Betrachte den Fall mit allgemeiner Kostenfunktion $c(\cdot)$. Mit welcher Verteilung randomisieren die Spieler nun im Nash–Gleichgewicht?

Aufgabe 4.2 In einer Provinzstadt lebt eine Kontinuum $I = [0, 1]$ von Einwohnern. Die einzige Freizeitbeschäftigung an einem Wochenende ist eine Wanderung in die weitläufige Umgebung, die einen Nutzen von 1 liefert. Eines Tages stirbt der reichste Bewohner der Stadt. In seinem Testament verfügt er, dass aus seinem Nachlass ein Museum gebaut werden soll. Nachdem das Museum gebaut ist, entscheidet jeder Einwohner, ob er ins Museum oder Wandern geht. Der Nutzen eines Museumsbesuches hängt wegen des daraus resultierenden Gedränges negativ vom Anteil α der anderen Einwohner ab, die ebenfalls das Museum besuchen, und ist gegeben durch:

$$2 \cdot (1 - \alpha)$$

Auf Beschluss des Stadtrates hin ist der Eintritt für das Museum frei.

(a) Bestimme den Anteil von Museumsbesuchern im sozialen Optimum und im Nash-Gleichgewicht.

(b) Wie hoch ist der Nutzen für einen Einwohner vor und nach der Eröffnung des Museums? Erkläre.

(c) Bei der nächsten Wahl wird aus unerfindlichen Gründen ein Spieltheoretiker zum Bürgermeister gewählt. Als erste Amtshandlung verfügt er, dass das Museum einen Eintrittspreis in Höhe von $p = 1/2$ erhebt und dass die resultierenden Einnahmen gleichmäßig an alle Bewohner der Stadt verteilt werden. Wie hoch ist nun der Anteil von Museumsbesuchern? Zeige, dass sich durch die Massnahme der Nutzen aller Bewohner erhöht!

Bitte wenden!

Aufgabe 4.3 Betrachte das Teamproblem mit der Produktionsfunktion $f(s) = s_1 + \ldots + s_n$ und individuellen Kostenfunktionen $c_i(s_i) = 1/2 \cdot s_i^2$.

(a) Zeige, dass das soziale Optimum $\hat{s}_i = 1$ für alle i, und der sozial optimale Output $\hat{y} = n$ ist.

(b) Betrachte das folgende Entlohnungssystem. Ist der Gesamtoutput $f(s)$ gleich hoch oder höher als der sozial optimale Output $\hat{y}$, dann bekommt jeder Spieler eine Entlohnung von 1. Ist der Gesamtoutput $f(s)$ kleiner als der sozial optimale Output $\hat{y}$, bekommt kein Spieler eine Entlohnung. Zeige, dass es unter diesem Entlohnungssystem ein Nash–Gleichgewicht gibt, das sozial optimal ist.

Aufgabe 4.4 In einem indischen Fischerdorf am unteren Flusslauf fischt ein Fischer seit Jahr und Tag eine Menge $s_1 \in [0, \infty)$ von Fischen. Der Wert eines Fisches ist 1, und der Fang der Menge s_1 kostet $c(s_1) = 1/2 \cdot s_1^2$. Eines Tages eröffnet ein multinational agierender Konzern am oberen Flusslauf eine Anlage zur Produktion von Lederfußbällen. Der Wert eines Balles ist 1, und die Produktion von $s_2 \in [0, \infty)$ Bällen kostet $c(s_2) = 1/2 \cdot s_2^2$. Der Multi leitet sein Abwasser ungeklärt in den Fluss ab. Bei einer Produktion von s_2 Bällen reduziert sich dadurch der Wert eines Fisches von 1 auf $(1 - 1/2 \cdot s_2)$.

(a) Bestimme den Nutzen des Fischers vor der Ansiedlung des Multis.

(b) Bestimme das soziale Optimum $\hat{s}$ und das Nash-Gleichgewicht s^* nach der Ansiedlung des Multis sowie die jeweils resultierenden Nutzen.

(c) Die Volkswirte des Multis erkennen natürlich, dass das Nash-Gleichgewicht nicht effizient ist und machen dem Fischer den folgenden Vorschlag: “Wir verpflichten uns zu einer Produktion von $\hat{s}_2$ Bällen, wenn du uns im Gegenzug den Betrag t bezahlst.” Zeige, dass der Fischer das Angebot annimmt, wenn $t \leq 7/72$, und dass sich der Multi besser stellt als im Nash-Gleichgewicht, wenn $t \geq 4/72$.

(d) Nimm nun an, dass die Regierung dem Fischer das Eigentumsrecht an dem gesamten Fluss überträgt. Das bedeutet, dass der Multi zur Einleitung von Abwasser die Erlaubnis des Fischers einholen muss. Wie viel muss jetzt der Multi dem Fischer mindestens bezahlen, um die Erlaubnis zur Produktion von $\hat{s}_2$ bzw. von s_2^* Bällen zu erhalten? Rentiert sich das für den Multi?