KAP 11. Teilspiele und Teilspielperfektheit (unvollk. Info)

- Wir erweitern jetzt die Idee von Teilspielperfektheit auf Spiele unter <u>unvollkommener</u> Information
- Im Prinzip ist alles wie unter vollkommener Information
  - nur dass wir jetzt nicht-triviale Informationsmengen berücksichtigen

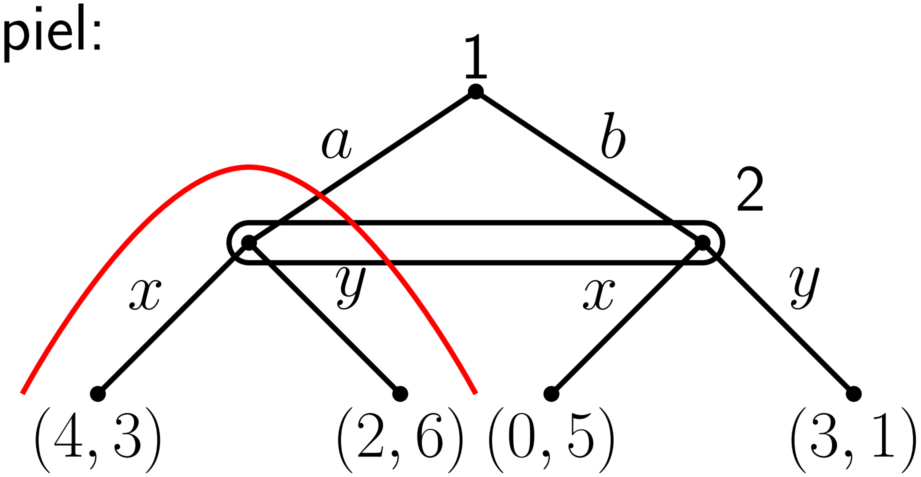
Teilspiele Definition:

Ein Teilspiel eines extensiven Spieles unter unvollkommener Information ist

- jeder (gesamte) Teilabschnitt innerhalb eines Spielbaums, ...
- ... der selbst wiederum ein Spiel in extensiver Form darstellt

KEINE Teilspiele

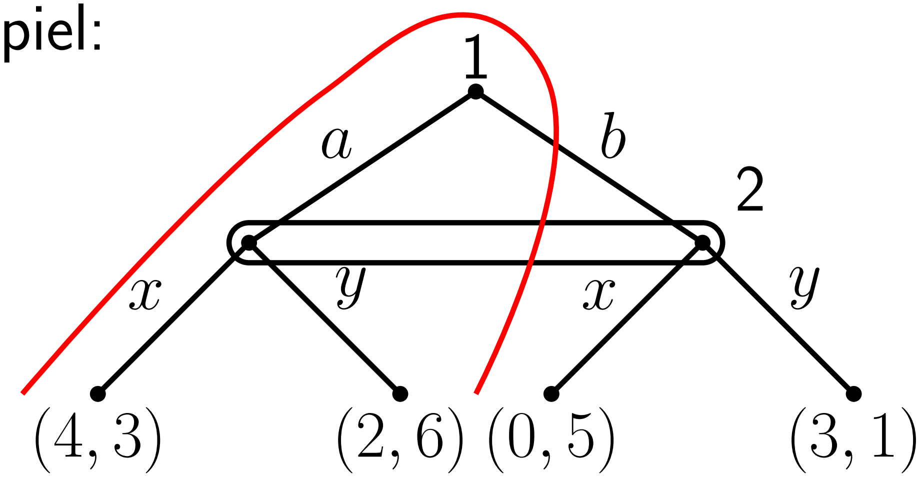
- Abschnitte, die innerhalb einer nicht-trivialen Info-menge beginnen ...
  - ... sind keine Teilspiele
- Bsp: KEIN Teilspiel:



- Der Abschnitt innerhalb der roten Linie ist KEIN Teilspiel
  - denn er beginnt nicht an einem einzelnen Knoten

KEINE Teilspiele

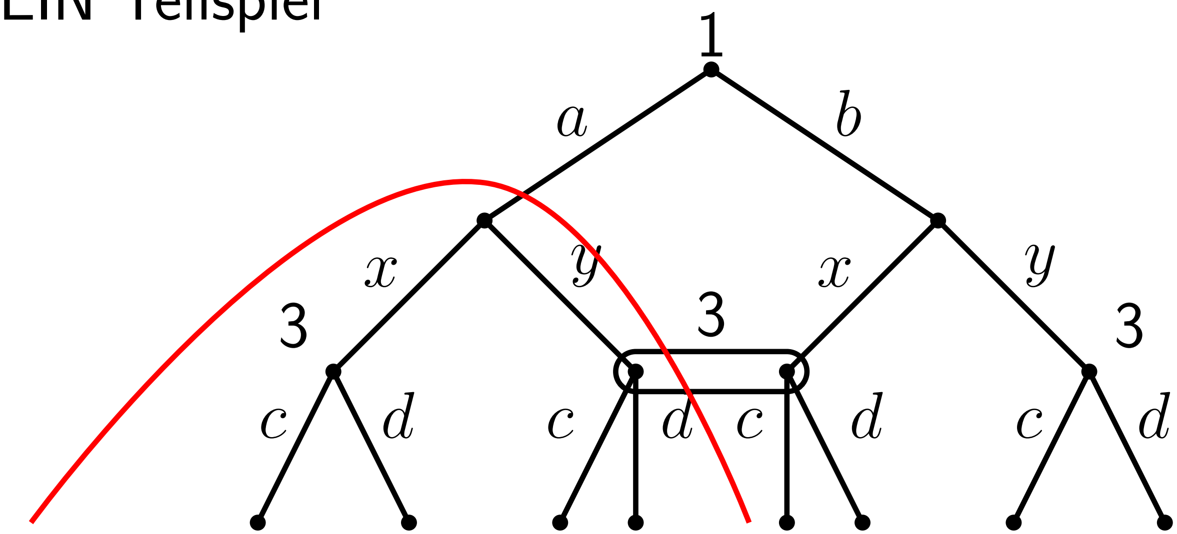
- Abschnitte, die nicht <u>alle</u> von einem Knoten abgehende Zweige umfassen, sind <u>keine</u> Teilspiele
- Bsp: KEIN Teilspiel:



- Der Abschnitt innerhalb der roten Linie ist KEIN Teilspiel
  – denn er umfasst nicht alle Aktionen, die von dem Entscheidungsknoten abgehen

KEINE Teilspiele

- Abschnitte, die Info-mengen durchschneiden, ...
  - ... sind keine Teilspiele
- Bsp: KEIN Teilspiel



- Der Abschnitt innerhalb der roten Linie ist KEIN Teilspiel
  - denn er schneidet die mittlere Informationsmenge von SP3 durch

Teilspielperfektheit

Definition: Ein **teilspielperfektes** Nash-Gleichgewicht eines extensiven Spiels ist ein Strategienprofil $(s_1, ..., s_n)$ ...

– ... welches ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel ist

- Beachte: Definition umfasst das gesamte Strategienprofil

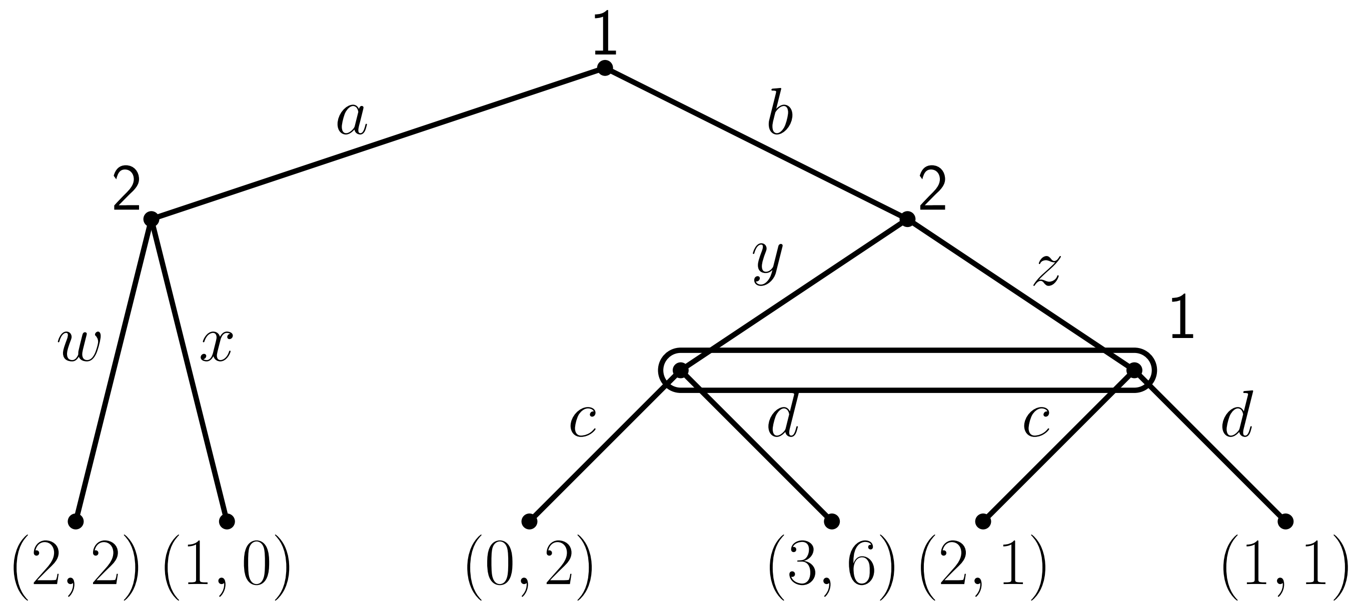
  – also auch Strategien in T-spielen, die nicht tatsächlich erreicht werden!

- In endlichen Spielen kann man TPNG wiederum via

Rückwärtsinduktion

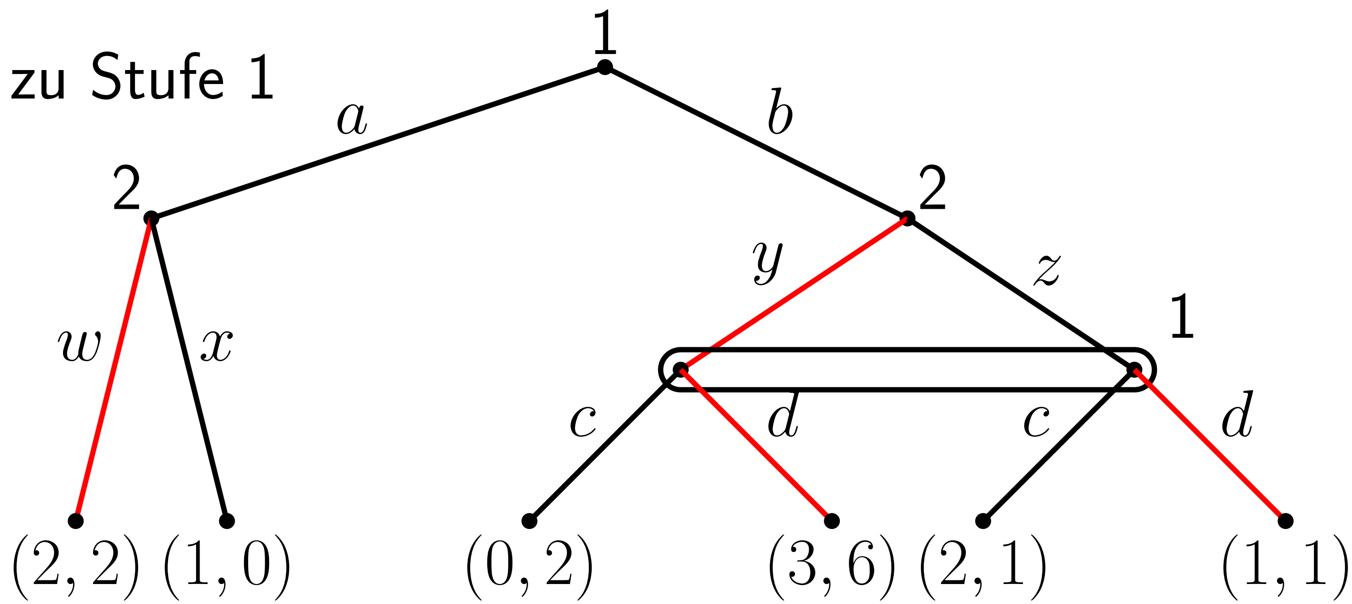
finden, aber muss nun möglicherweise auch simultane Spiele lösen

Beispiel



- Insgesamt drei T-Spiele: zwei auf Stufe 2, eins auf Stufe 1
- Beginne auf Stufe 2:
  - Linkes T-Spiel: w optimale für SP2
  - Rechtes T-Spiel: Nash-GG ausrechnen (in Normalf. umwandeln usw.)
    - in diesem Fall: (d, y) ist Nash-GG

- Gehe dann zu Stufe 1



- Nur noch ein T-Spiel
- Gegeben die Fortsetzungs-Strategien (w, y) von SP2 und d von SP1:
  - ◇ b ist beste Antwort für SP1 auf Stufe 1
- Damit: $s_1 = (b, d)$, $s_2 = (w, y)$ ist Nash-GG des Spiels
  - ◇ per Konstruktion: auch Nash-GG aller Teilspiele
  - ◇ Also auch teilspielperfektes Nash-GG

Rückwärtsinduktion in Spielen unter unvollkommener Info

- Nun basiert Rückwärtsinduktion auf der Idee ...
  - ... dass die Spieler annehmen, dass sie in Teilspielen,...
  - ... in denen es nicht-triviale Info-mengen gibt,...
  - ... ein Nash-GG spielen
- Dies ist eine stärkere Annahme als common knowledge of rationality ...
  - ... und nicht immer sehr plausibel ...
  - insbesondere, wenn das T-Spiel nicht nur ein Nash-GG hat ...
  - ... dann welches N-GG? (Selektionsproblem)
- Dennoch reduziert T-Sppfktht die Ausgänge (im Vergleich zu Nash)

KAP. 12: Anwendung – Preiswettbewerb

- Zu den klassische Anwendungen von Spielen unter unvollkommener ...

  ... Information gehören Marktmodelle mit wenigen Wettbewerbern

- Hatten schon betrachtet: Cournot–Modell
  - Firmen konkurrieren in Mengen
  - Marktnachfrage war einfach gegeben

- Jetzt: Betrachten Modelle, in denen
  - ... die Firmen in Preisen konkurrieren
  - ... und die Konsumentenentscheidung explizit modelliert wird

KAP. 12: Anwendung – Preiswettbewerb

- Man unterscheidet zwischen Wettbewerb in
  - homogenen Gütern und differenzierten Gütern
- Homogene Güter: Güter sind perfekt substituierbar
  - Bertrand-Wettbewerb $\rightarrow$ extreme Konkurrenz
- Differenzierte Güter: Güter sind nur imperfekt substituierbar
  - Hotelling-Modell $\rightarrow$ weniger starke Konkurrenz
- Vergleich wirft Frage auf, welche Anreize Firmen haben ...

  ... ihre Güter zu differenzieren
  - Hotelling–Modell mit endogener Produktdifferenzierung

Betrand Wettbewerb

- Spieler: Zwei Verkäufer, V1, V2, ein Käufer, K
  - V1 und V2 produzieren <u>identische</u> Güter zu Grenzkosten $c < 1$
  - K hat Wertschätzung 1 für das Gut und kauft höchstens ein Gut
- Spielregeln
  - V1 und V2 setzen simultan Preise $p_1, p_2 \geq 0$
  - K beobachtet Preise und entscheidet, ob er kauft und von wem
  - Kauft K bei Vi erhalten: K: $1 - p_i$, Vi: $p_i - c$, V$-i$: 0
  - Kauft K nirgends, erhalten alle 0
- Indifferenzregel: Ist K indifferent, kauft er bei V1 mit Wkt fifty-fifty

Betrand Wettbewerb

- Strategien
- Für Vi: ein Preis $p_i \geq 0$
  - zur Vereinfachung nehmen wir an: $p_i \leq 1$ [$\Rightarrow$ K kauft immer]
- K: für jedes Paar p_1, p_2 einen Verkäufer $\in \{1, 2\}$
  - (“nicht kaufen” entfällt wegen obiger Annahme)
  - Also: $s_K : [0, 1]^2 \rightarrow \{1, 2\}$
- Wir suchen nach einem TPNG

Stufe 2: Kaufentscheidung

- Gegeben p_1, p_2, ist der Nutzen von K ...
  - ◇ ... $= 1 - p_1$, wenn er bei V1 kauft
  - ◇ ... $= 1 - p_2$, wenn er bei V2 kauft
- Also optimale Strategie

$$s_K^*(p_1, p_2) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } p_1 < p_2 \\ 2 & \text{wenn } p_1 > p_2 \\ \in \{1, 2\} & \text{wenn } p_1 = p_2 \end{cases}$$

– letzte Zeile steht für Indifferenz

Stufe 1: Preisentscheidung

- Wir suchen nach einem Nash-GG des simultanen Preisspiels
- **Satz**: $p_1^* = c, \quad p_2^* = c$ ist Nash-GG
- **Beweis**: Zeige: Kein Verkäufer hat eine profitable Abweichung!
  - Im vorgeschlagenen GG macht V1 einen Gewinn von 0
    - ◇ Hat V1 ein profitable Abweichung nach oben $p_1 > c$?

$\rightarrow$ Abweichungsgewinn = 0 $\quad \rightarrow \quad$ nicht profitabel

    - ◇ Hat V1 ein profitable Abweichung nach unten $p_1 < c$?

$\rightarrow$ Abweichungsgewinn = $\quad p_1 - c < 0 \quad \rightarrow \quad$ nicht profitabel

- Damit Behauptung gezeigt

Beobachtungen

- Preis = Grenzkosten
  - Betrand Modell ist spieltheoretische Fundierung von vollst. Wettbew.
- Firmen machen 0-Gewinne, gesamter Kuchen geht an K
- Warum?
  - Güter sind <u>identisch</u> (Betrand erfasst Kern von Substituierbarkeit)
  - Firmen haben gleiche Grenzkosten
  - (Firmen haben unbeschränkte Kapazität)
- Resultat gilt erst recht für mehr als zwei Firmen
  - aber: zwei Firmen sind genug für Wettbewerb

Hotelling Modell (Horizontale Produktdifferenzierung)

- Spieler: – Zwei Firmen, F1, F2
  - Kontinuum von Konsumenten $x \in [0, 1]$
  - Konsument $x \in [0, 1]$ hat die "Hausnummer" x
  - Firma 1 hat ihren Sitz in $\ell_1 \in [0, 1]$ und Firma 2 in $\ell_2 \in [0, 1]$
- Spielregeln:
  1. Die Firmen wählen simultan ihre Standorte ℓ_1 und ℓ_2
  2. Firmen beobachten Standorte und wählen simultan Preise p_1 und p_2
  3. Die Konsumenten beobachten die Standorte und Preise ...

     ... und entscheiden, ob sie ein Gut kaufen und von wem

Hotelling Modell

- Nutzen der Konsumenten:
  - Jeder Konsument kauft maximal ein Gut
  - Der Konsum des Gutes liefert den Basisnutzen $r > 0$
  - Kauft Konsument x bei Fi, so muss er die Strecke $|x - \ell_i|$ zurücklegen

    ... daraus erwachsen Transportkosten $t(x - \ell_i)^2$
  - Also: $u_i(x) = r - t(x - \ell_i)^2 - p_i$
- Interpretation: Standort entspricht einer Ausprägung des Gutes ...

  ... Farbe, Form, Geschmack ...
  - Konsument x hat die Lieblingsausprägung x und muss Abstriche ...

  ... machen, wenn er stattdessen nur ℓ_i bekommt

Hotelling Modell

- Profite der Firmen:
  - Die Wahl eines Standorts ist kostenlos
  - Produktionskosten pro Gut sind $c > 0$ (konstante Grenzkosten)
  - Also: Verkauft Fi die Menge D_i zum Preis p_i, dann: $\pi_i = D_i(p_i - c)$
- Annahmen:
  - ◇ r groß $\longrightarrow$ jeder Konsument kauft ein Gut
  - ◇ $\ell_1 \leq \ell_2$ (Sonst: Indizes tauschen)

Hotelling Modell

- Fragen:
  - wie viel Produktdifferenzierung?
    - ◇ $|\ell_1 - \ell_2|$ groß oder klein?
    - ◇ sozial zu viel oder zu wenig Produktdifferenzierung?
  - Wie hängen die Preise (Wettbewerbsintensität) ab ...

    ... von ℓ_1, ℓ_2 und vom Transportkostenparamenter t
- Nun: Lösen des Modells via Rückwärtsinduktion

Stufe 3: Konsumentenentscheidung

- Ein Konsument entscheidet unter vollkommener Info
- Strategie für K: Für alle ℓ_1, ℓ_2, p_1, p_2 eine Kaufentscheidung $\in \{F1, F2\}$
- Optimal Strategie für Konsument x:
  - Kaufe bei Fi, wenn $u_i(x) \geq u_j(x) \quad i \neq j$

  $\Leftrightarrow \quad r - t(x - \ell_i)^2 - p_i \geq r - t(x - \ell_j)^2 - p_j$
- K wählt Fi mit <u>kleinstem</u> $\quad p_i + t(x - \ell_i)^2$

Stufe 3: Indifferenter K und Nachfrage

- Wir sehen: es gibt genau einen <u>indifferenten</u> Käufer $\widehat{x}$
  - Wenn $x < \widehat{x}$ $\quad\rightarrow$ kaufe bei F1
  - Wenn $x > \widehat{x}$ $\quad\rightarrow$ kaufe bei F2
- Indifferenzbedingung: $\quad p_1 + t \cdot (\widehat{x} - \ell_1)^2 = p_2 + t \cdot (\widehat{x} - \ell_2)^2$
- Umformen ergibt

$$\widehat{x} = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t(\ell_2 - \ell_1)}$$

- Nachfrage für F1: $\quad D_1 = \widehat{x}(\ell_1, \ell_2, p_1, p_2)$
- Nachfrage für F2: $\quad D_2 = 1 - \widehat{x}(\ell_1, \ell_2, p_1, p_2)$

Stufe 2: Preisentscheidung

- Strategie für Fi: $\quad p_i(\ell_1, \ell_2) \geq 0$

- Preisspiel lösen via BeO für Nash-GG

- Gewinne via R-Ind: $\quad \pi_i(\ell_1, \ell_2, p_1, p_2) = D_i(\ell_1, \ell_2, p_1, p_2)(p_i - c)$

- BeO: Lösen von $\quad \partial\pi_1/\partial p_1 = 0$, $\partial\pi_2/\partial p_2 = 0 \quad$ ergibt

$$p_1^* = c + t \cdot (\ell_2 - \ell_1)(1 + \frac{\ell_1 + \ell_2 - 1}{3}) \tag{1}$$

$$p_2^* = c + t \cdot (\ell_2 - \ell_1)(1 + \frac{\ell_2 + \ell_1 - 1}{3}) \tag{2}$$

- Beachte: Preis $\geq$ Grenzkosten
  - Falls $t = 0$, oder $\ell_2 - \ell_1 = 0$, dann Betrand–Wettbewerb!

Stufe 1: Standort-/Produktentscheidung

- Strategie für F1: $\ell_1 \in [0, .5]$. Für F2: $\ell_2 \in [0.5, 1]$
- Gewinne via R-Ind: $g_i(\ell_1, \ell_2) = \pi_i(\ \ell_1, \ell_2, p_1^*(\ell_1, \ell_2), p_2^*(\ell_1, \ell_2)\ )$
  – Beachte: p_i^*'s hängen selber von ℓ_i's ab!!
- BeO via Kettenregel

$$\frac{\partial g_i}{\partial \ell_i} = \frac{\partial \pi_i}{\partial \ell_i} + \frac{\partial \pi_i}{\partial p_1}\frac{\partial p_1^*}{\partial \ell_i} + \frac{\partial \pi_i}{\partial p_2}\frac{\partial p_2^*}{\partial \ell_i}$$

- Ausrechnen ergibt für F1 [für gegebenes ℓ_2]

$$\frac{\partial g_1(\ell_1, \ell_2)}{\partial \ell_1} = (p_1^* - c)\left(\frac{\partial \widehat{x}}{\partial \ell_1} + \frac{\partial \widehat{x}}{\partial p_2} \cdot \frac{\partial p_2^*}{\partial \ell_1}\right)$$

- Für F2 analog

Stufe 1: Standort-/Produktentscheidung

- Bevor wir rechnen, versuchen wir, die Formel ökonomisch zu verstehen

$$\frac{\partial g_1(\ell_1,\ell_2)}{\partial \ell_1} = (p_1^* - c)\left(\underbrace{\frac{\partial \widehat{x}}{\partial \ell_1}}_{A} + \underbrace{\frac{\partial \widehat{x}}{\partial p_2}}_{B} \cdot \underbrace{\frac{\partial p_2^*}{\partial \ell_1}}_{C}\right)$$

- Ableitung ist Veränderung des Gewinns, wenn F1 näher zur Mitte rückt
  - d.h. größeres ℓ_1 wählt
- Wir können nun die gesamte Veränderung in zwei Effekte aufspalten
  - gegeben durch A und $B \cdot C$

Stufe 1: Standort-/Produktentscheidung

- Der Term A misst die direkte Veränderung der Nachfrage ...

  ... durch größeres ℓ_1

  – diese Veränderung ist immer positiv: $A \geq 0$

  – denn je näher F1 zur Mitte rückt, umso größer seine Kundschaft

Stufe 1: Standort-/Produktentscheidung

- Der Term $B \cdot C$ misst die <u>indirekte</u> Veränderung der Nachfrage ....

  ... durch größeres ℓ_1

- Dies ist ein <u>strategischer</u> Effekt:
  - Rückt F1 zur Mitte, intensiviert sich der Preiswettbewerb
  - Produkte werden sich ähnlicher, beide GG-Preise p_1^* und p_2^* fallen
- Der Term C ist immer negativ (da ja p_2^* fällt): $\quad C \leq 0$
- Der Term B ist immer positiv: $\quad B \geq 0$
  - denn eine Preiserhöhung von F2 erhöht $D_1 = \widehat{x}$

Stufe 1: Standort-/Produktentscheidung

- Damit ist das Produkt $B \cdot C$ negativ
- MaW: Eine Erhöhung von ℓ_1 hat zwei gegenläufige Effekte
  - Markt wird größer (direkter Effekt, immer positiv)
  - Wettbewerbseffekt (Preise fallen, immer negativ)
- Wenn F1 ihren Standort wählt, wägt sie diese beiden Effekte ab
- Einfache Rechnung: Die Ableitung $\frac{\partial g_1(\ell_1, \ell_2)}{\partial \ell_1}$ ist immer negativ
- Also: Wettbewerbseffekt überwiegt, und es gibt ...

  ... eine Randlösung: F1 lässt sich in $\ell_1^* = 0$ nieder
- Genauso für F2: $\ell_2^* = 1$

Satz (a) Im Hotelling Modell mit endogener Standortwahl und quadratischen Transportkosten gibt es genau eine TPNG.

(b) In diesem TPNG kommt es zu maximaler Produktdifferenzierung.

– D.h., beide Firmen siedeln sich am äußersten Rand an: $\ell_1^* = 0, \ell_2^* = 1$

Bemerkung

– Produktdifferenzierung ist ein Instrument, ...

... um Bertrand–Wettbewerb zu vermeiden

– Aus sozialer Sicht ist die Produktdiffernzierung ineffizient groß:

– Soziales Optimum: $\widehat{\ell_1} = 1/4, \widehat{\ell_2} = 3/4$