Kap 13: Wiederholte Spiele

- In vielen Situation interagieren Spieler wiederholt:
  - Konkurrenz auf Märkten oder in Auktionen
  - Interaktion innerhalb von Organisationen und Gruppen

    (Firmen, Verwaltungen, Dorfgemeinschaften, Familie, ...)
- Wir modellieren wiederholte Interaktion als ein dynamisches Spiel ...
  - ... in dem die SP in jeder Runde das gleiche statische Spiel spielen...
  - ... und direkt danach die Aktionen der anderen beobachten

Wiederholte Spiele

- In wiederholten Spielen haben die SP die Möglichkeit ...
  - ... zukünftiges Verhalten auf ihr vergangenes Verhalten zu <u>konditionieren</u>
  - SP können sich gegenseitig "belohnen" und "bestrafen"
- Dies kann zu radikal anderem Verhalten als in einer "one–shot" Interaktion führen
- Entscheidend dafür wird sein, ob das zugrunde liegende statische Spiel
  - ... (A) multiple Nash–GGe hat
  - ... (B) <u>endlich oft</u> oder <u>unendlich oft</u> wiederholt wird!

ENDLICH oft wiederholte Spiele

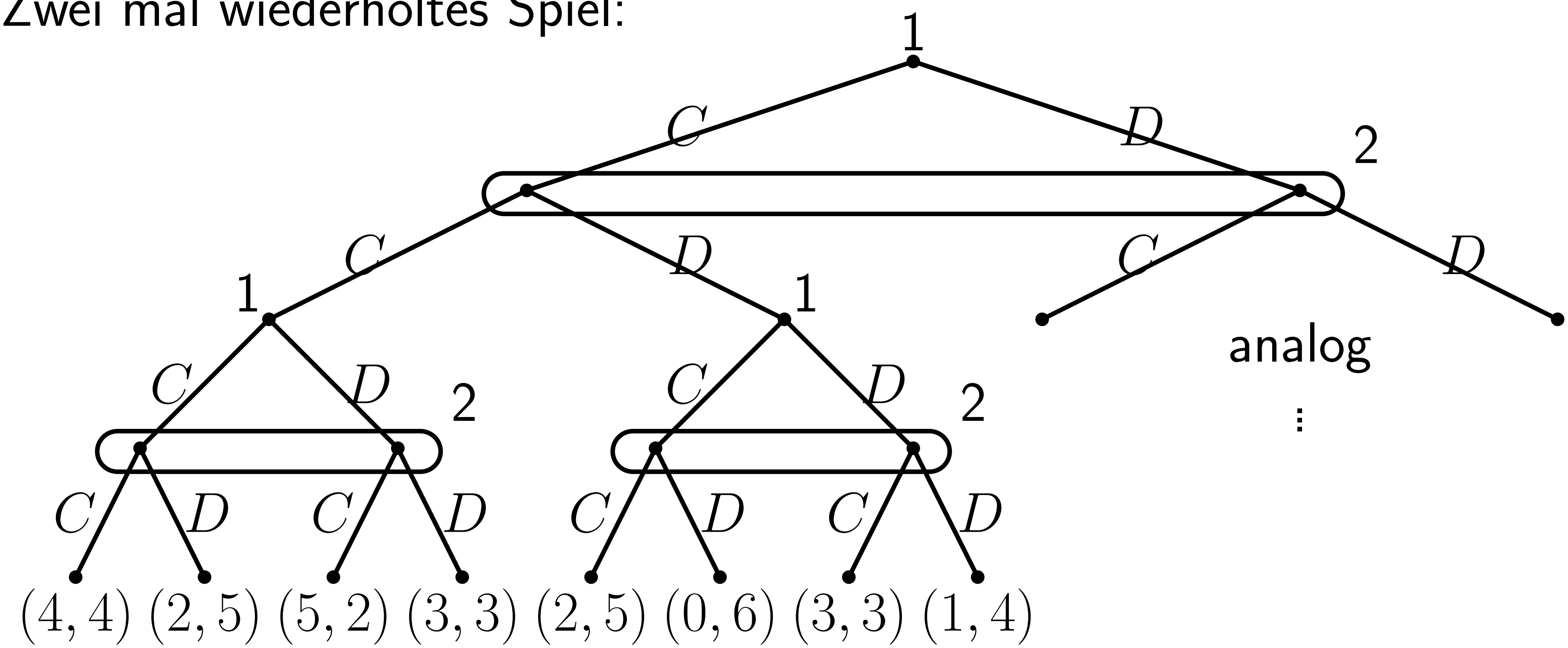
- Sei G ein Spiel in Normalform (das sogenannte Basisspiel)
- Sei $T < \infty$ die Anzahl der Runden
- Sei G^T das Spiel in extensiver Form, in dem ...
  - in jeder Runde $t = 1, \ldots, T$ das Basisspiel gespielt wird
  - nach Runde t und vor Runde $t + 1$ alle Spieler den gesamten bisherigen Spielverlauf beobachten
  - die Auszahlungen gegeben sind als Summe der Auszahlungen aus den T Basisspielen
- G^T heißt das T–mal wiederholte Spiel (oder Superspiel)

Das zwei mal gespielte GD

- Basisspiel:

	C	D
C	$2,2$	0,3
D	3,0	1,1

- Zwei mal wiederholtes Spiel:



Das zwei mal gespielte GD

- Strategien sind von der Form: $(a, bcde)$ mit $a, b, c, d, e \in \{C, D\}$:
  - spiele a in Runde 1
  - spiele b in Runde 2, wenn (C, C) in Runde 1 gespielt wurde
  - spiele c in Runde 2, wenn (C, D) in Runde 1 gespielt wurde
  - spiele d in Runde 2, wenn (D, C) in Runde 1 gespielt wurde
  - spiele e in Runde 2, wenn (D, D) in Runde 1 gespielt wurde
- Bsp: $(C, DCDC)$

Das zwei mal gespielte GD

- Ermittlung der TPNG via Rückwärtsinduktion
- Betrachte Teilspiel in Runde 2
  - sei (v_1, v_2) die Auszahlung aus dem Spiel in Runde 1
  - z.B. (C, D) in Runde 1 $\quad \rightarrow (v_1, v_2) = (0, 3)$

Das zwei mal gespielte GD

- In Runde 2 ergibt sich das Spiel

	C	D
C	$2+v_1,\ 2+v_2$	$0+v_1,\ 3+v_2$
D	$3+v_1,\ 0+v_2$	$1+v_1,\ 1+v_2$

- Addition von v_1 und v_2 verändert die strategische Struktur nicht!

- Also: (D, D) ist einziges Nash-GG ...

  .. unabhängig davon, was in Runde 1 gespielt wurde

- In jedem TPNG, muss (D, D) in Runde 2 gespielt werden
  - Auszahlungen in Runde 2: $(1, 1)$

Das zwei mal gespielte GD

- Betrachte nun Runde 1

- Die SP antizipieren, dass sie in Runde 2 (D, D) spielen, ...

  ... unabhängig von ihrem Verhalten heute

- Reduziertes Spiel ergibt sich durch Addition der Auszahlungen:

	C	D
C	$2+1,\ 2+1$	$0+1,\ 3+1$
D	$3+1,\ 0+1$	$1+1,\ 1+1$

- Eindeutiges Nash-GG im reduzierten Spiel: (D, D)

  – Also: $((D, DDDD), (D, DDDD))$ ist eindeutiges TPNG von G^2

Verallgemeinerung

- Betrachte nun allgemeines $T > 0$
- Mit dem gleichen Argument wie oben:

  ◇ in Runde T und $T-1$ spielen alle SP immer D

- in Runde $T-2$ antizipieren die SP ihr zukünftiges Verhalten:

	C	D
C	$2+2,\ 2+2$	$0+2,\ 3+2$
D	$3+2,\ 0+2$	$1+2,\ 1+2$

- Also: (D, D) ist Nash–GG des reduzierten Spiels in Runde $T-2$
- Argument gilt für alle Runden t

  $\rightarrow$ "immer D" ist eindeutiges TPNG in G^T

Verallgemeinerung für allgemeine Spiele

- Betrachte ein Basispiel G mit eindeutigem Nash–GG $s^* = (s_1, \ldots, s_n^*)$
  - und betrachte ein beliebiges Teilspiel H der letzten Runde T
- Die strategische Struktur von H ist die gleiche wie von G ...
  - ... denn die bis T angesammelten Auszahlungen verändern die ...

    ... Auszahlungen <u>aller</u> Strategien in H <u>gleichmäßig</u>
- Also ist s^* das einzige Nash–GG von H
- Rückwärtsinduktion:
  - im reduzierten Spiel in Runde $T - 1$ ist s^* das einzige Nash–GG
  - also: im reduzierten Spiel in Runde $T - 2$ ist s^* das einzige Nash–GG
  - usw

Satz: Sei $T < \infty$, und sei G ein Basisspiel mit eindeutigem Nash–GG $s^* = (s_1, \ldots, s_n^*)$.

- Dann hat das wiederholte Spiel G^T ein eindeutiges TPNG
- In diesem TPNG wird in jeder Runde t das Strategienprofil s^* gespielt
  - unabhängig vom bisherigen Spielverlauf

Bemerkung:

- Dass G ein eindeutiges Nash–GG hat, ist entscheidend
- Wir betrachten jetzt ein Bsp ...
  - ... in dem G multiple GGe hat und
  - ... in $t = 1$ ein Strategienprofil gespielt wird, das kein GG von G ist!

Beispiel mit multiplen GGen im Basisspiel

	L	M	R
L	$1, 1$	$5, 0$	$0, 0$
M	$0, 5$	$4, 4$	$0, 0$
R	$0, 0$	$0, 0$	$3, 3$

- Das Basisspiel hat zwei Nash-GGe: (L, L) (R, R)
  - (M, M) ist sozial optimal, aber kein N-GG
- Beachte: In G^2 ist es ein TPNG, wenn ...
  - ... unabhängig vom Spielverlauf ...
  - ... in jeder Runde dasselbe Nash–GG des Basisspiels gespielt wird
- Aber es gibt noch andere TPNG in G^2

Beispiel mit multiplen GGen im Basisspiel

- Betrachte die folgende Strategie s_i
  - Runde 1: spiele M
  - Runde 2: $\diamond$ wenn in Runde 1 (M, M) gespielt wurde: spiele R

    $\diamond$ andernfalls: spiele L
- Behauptung: $s = (s_1, s_2)$ ist ein TPNG!
- In der Tat, für jedes Teilspiel in Runde 2 ...
  - ... spezifiziert s ein Nash–GG dieses Teilspiels
  - also: kein Anreiz abzuweichen

- Betrachte nun das reduzierte Spiel in Runde 1

	L	M	R
L	$1+1,\ 1+1$	$5+1,\ 0+1$	$0+1,\ 0+1$
M	$0+1,\ 5+1$	$4+3,\ 4+3$	$0+1,\ 0+1$
R	$0+1,\ 0+1$	$0+1,\ 0+1$	$3+1,\ 3+1$

- Beachte: (M, M) ist Nash-GG des reduzierten Spiels
  - also s ist TPNG von G^2
- Der GG–Pfad ist $(M, M), (R, R)$
  - obwohl (M, M) kein GG von G!

Was passiert?

- Das Strategienprofil s ist eine <u>implizite</u> Abmachung der SP ...
  - sich gegenseitig zu bestrafen, wenn jemand in Runde 1 nicht M spielt
- Die Bestrafung besteht darin, in Runde 2 das "schlechte" Nash-GG ...

  ... (L, L) zu spielen, falls ein SP in Runde 1 von M abweicht
- Die Strafandrohung ist glaubwürdig, denn (L, L) ist Nash-GG von G
- Eine Abweichung zu M würde zwar heute Gewinn bringen ...
  - ... aber morgen zu Verlusten führen
- Indem das zukünftige Verhalten auf das heutige konditioniert wird, ...

  ... können heute effizientere Aktionen implementiert werden!

UNendlich of wiederholte Spiele

- Die eben geschilderte Logik impliziter Abmachungen tritt voll zutage

  ... in <u>unendlich</u> oft wiederholten Spielen

- In der Tat: wir werden sehen, dass es sogar ...

  ... im Gefangenen Dilemma zu kooperativem Verhalten kommen kann

  ... wenn die SP hinreichend geduldig sind

Beispiel: Gefangenen Dilemma

	C	D
C	$2, 2$	$0, 3$
D	$3, 0$	$1, 1$

- Nimm an, Spiel wird unendlich oft gespielt
  - in jeder Runde $t = 1, 2, ...$: Spieler ziehen simultan
  - danach beobachten SP gegenseitig ihre Aktion
- Eine Strategie spezifiziert für jede Geschichte von vorherigen Spielausgängen eine Aktion C oder D
- Gibt es ein TPNG, in dem die SP entlang des GG–Pfades C wählen??

Kooperationsstrategie: wie du mir, so ich dir

- Ein Spieler (SP2) könnte sagen:

  – ich beginne mit C und spiele C immer dann, wenn Du zuvor auch C gespielt hast

  - wenn Du ein mal D gespielt hast, werde ich von da ab immer D spielen

- Kann das SP1 davon abhalten, D zu spielen?

- Wichtige Beobachtung: D bringt heute Gewinn, aber morgen Verlust

  – D bringt heute 3, (da SP2 heute kooperiert), aber ab morgen nur 1

  – C bringt heute nur 2, aber dafür spielt SP2 morgen noch immer C

- Wenn SP1 geduldig ist, sollte er also kooperieren

Kooperationsgleichgewicht

- Annahme: Spieler diskontieren Zukunft mit $\delta \in [0,1]$
- h_t bezeichne eine Geschichte von Spielausgängen bis zum Ztpkt t
  - z.B. $h_3 = ((C,D),(D,D),(C,D))$
- Eine Strategie spezifiziert fur jede Geschichte eine Aktion in $\{C, D\}$
- Betrachte die folgende Strategie für Spieler i in t:
  - ◇ Spiele C, wenn $h_t = ((C,C),\ldots,(C,C))$
  - ◇ Spiele D, andernfalls
- In Worten: “spiele C, wenn zuvor immer C gespielt wurde, sonst D”

Kooperationsgleichgewicht

Satz: Das so definierte Strategienprofil ist ein TPNG des unendlich of wiederholten Gefangenen Dilemmas, wenn δ hinreichend gross ist.

Beweis: Z.z: in keinem T-SP will ein Spieler abweichen

- Es gibt zwei Typen von Teilspielen
  - Typ 1: T-Sp, die einer Gesch. folgen, in der jemand D gespielt hat
  - Typ 2: T-Sp, die einer Gesch. folgen, in der niemand D gespielt hat

Teilspiele vom Typ 1

- Wir zeigen: SP1 hat keinen Anreiz abzuweichen

- Im Kandidaten-GG spielt SP2 immer D

- Folgt SP1 dem Kandidaten-GG, spielt er immer D und ...

  ... erhält in jeder Runde 1

- Weicht SP1 ab, spielt er in manchen Runden C und ...

  – erhält in diesen Runden 0 statt 1

  $\longrightarrow$ Abweichen nicht profitabel

Teilspiele vom Typ 1

- Folgt SP1 Kandidaten-GG → SP1 immer C → SP2 immer C:

$$u_1^{Folgen} = 2 + \delta \cdot 2 + \delta^2 \cdot 2 + ... = \qquad 2 \cdot \textstyle\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = 2/(1-\delta)$$

- Weicht SP1 ab und spielt heute D
  - ... dann erhält er heute 3 ...
  - ... SP2 spielt <u>dann</u> aber immer D ...

  → SP 1 erhält in allen Zukunftsrunden maximal 1

$$u_1^{Abw} = \underbrace{3}_{\text{heute}} + \underbrace{\delta + \delta^2 + ...}_{\text{Zukunft}} = \qquad 3 + \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t = 3 + \delta/(1-\delta)$$

- Abweichen nicht profitabel, wenn: $u_1^{Abw} \leq u_1^{Folgen} \quad \Leftrightarrow \delta \geq 1/2$

Kooperationsgleichgewicht

- Warum kommt es zu Kooperation?
- Das TPNG entspricht der impliziten Absprache, ...
  - die Wahl C durch Weiterspielen von (C, C) zu belohnen
  - die Wahl D durch Rückkehr zum statischen N-GG (D, D) zu bestrafen
- Damit bringt D heute hohe Gewinne, aber zukünftige Verluste
  - wenn SP geduldig sind (δ groß), ist C optimal
- Radikal anderer Spielausgang als im endlich wiederholten Spiel!
  - unendlicher Zeithorizont macht's möglich

Kooperationsgleichgewicht

- Unendlichkeit des Zeithorizonts muss man nicht wörtlich nehmen
  - δ kann man ansehen als Wkt, dass Spiel in die nächste Runde geht
- Die Theorie wiederholter Spiele liefert also eine Erklärung ...
  - ... der in der Realität und Experimenten ...
  - ... häufig beobachteten Kooperation im GD
- Diese Erklärung beruht auf ...
  - ... der Eigennutzorientierung rationaler Spieler
  - ... und <u>nicht</u> auf Faktoren wie Fairness, soziale Normen, etc.

Kollusion im Bertrand-Wettbewerb

- Hatten gesehen: in statischem Betrand: Preis $=$ Grenzkosten $= c$
- Situation für Firmen ist ähnlich wie im GD
  - beide wären besser gestellt mit $p_1 = p_2 >$ Grenzkosten
- Aus Firmensicht bester Preis $=$ Monopolpreis $p^m =$ Zahlungsbereitschaft des K
- Im wiederholten Spiel können die Firmen sich nun wie im wiederholten GD auf den Monopolpreis "einigen"
  - stillschweigende (implizite) Kollusion
  - i.U. zu explizitem Kartellvertrag, der explizite Strafen vorsieht

Kollusion im Bertrand-Wettbewerb

Satz: Wenn δ hinreichend gross ist, dann ist die folgende Strategie (für jede Firma) ein TPNG des unendlich oft wiederholten Betrand-Spieles:

- Beginne mit $p_i = p^m$
- Spiele weiterhin $p_i = p^m$, wenn Konkurrent auch p^m gespielt hat
- Nach Abweichung des Konkurrenten von p^m, spiele für immer $p_i = c$

Beweis: wie im wiederhoten GD ($\rightarrow$ selbst)

Verallgemeinerung

- Sei $G = \{u_i, S_i\}_{i=1}^n$ ein statisches Spiel in Normalform (**Basisspiel**)
- Sei s^* ein Nash-GG von G
- Sei $\widehat{s}$ ein Strategienprofil, das alle Spieler besser stellt als s^*

  $u_i(\widehat{s}) > u_i(s^*)$ für alle i

- Betrachte nun das unendlich oft wiederholte Spiel G^∞:

  ... in jeder Runde $t = 1, 2, ...$ wird das Spiel G gespielt

  ... alle Spieler beobachten die Spielausgänge der Vorrunde

- Eine Strategie für SPi in G^∞ spezifiziert ...

  ... für jede Geschichte von Spielausgängen eine Aktion in S_i

Trigger-Strategien

Die folgende Strategie für SPi heisst **Trigger-Strategie**

- Beginne in $t = 1$ mit $\widehat{s}_i$
- In allen weiteren Runden $t > 1$:
  - ◇ Spiele $\widehat{s}_i$, wenn alle Spieler die Strategie $\widehat{s}_j$ ...

    ... in allen Vorrunden gespielt haben
  - ◇ Spiele s_i^*, sobald irgendein SPj irgendeine Strat $s_j \neq \widehat{s}_j$

    ... in irgendeiner Vorrunde $t' < t$ gespielt hat

- Trigger = Auslöser
  - Man nennt die Strategie auch "Nash-reversion"-Strategie

Folk-Theorem Wenn δ nahe genug bei 1 ist, dann ist das Strategienprofil von Trigger-Strategien ein TPNG des wiederholten Spieles.

In diesem GG erzielt jeder Spieler i den Nutzen $\quad U_i = u_i(\widehat{s})/(1-\delta)$

Beweis: Wie im GD Beispiel

- T-Sp vom Typ 1: Einfach zu sehen, dass Abweichen nicht profitabel
- T-SP vom Typ 2: Nutzen aus Abweichen

$$u_i^{Abw} = \underbrace{\max_{s_i} u_i(s_i, \widehat{s}_{-i})}_{\text{heute}} + \underbrace{\delta \frac{u_i(s^*)}{1-\delta}}_{\text{Zukunft}}$$

  - Nutzen aus "Folgen": $u_i^{Folgen} = u_i(\widehat{s})/(1-\delta)$
- Also: Abweichen nicht profitabel, wenn δ gross genug ist

Bemerkung

- Im allgemeinen gibt es sehr viele TPNG in wiederholten Spielen
- Man sagt, das Profil $\widehat{s}$ wird als GG gestützt ...

  ... wenn es eine Strategie im wiederholten Spiel gibt ...

  ... so dass $\widehat{s}$ in jeder Runde auf dem GG-Pfad gespielt wird
- Man kann zeigen, dass man fast alles als GG stützen kann
  - Schwäche des Modells wiederholter Spiele
- Stärke des Ansatzes: Einfaches Modell, das erklären kann, wie ...
  - ... Kooperation aus Eigennutzorientierung entstehen kann
  - ... <u>implizite</u> Absprachen/Verträge <u>dezentral</u> durchgesetzt werden können