KAP 14. Probleme mit Teilspielperfektheit

- Wir hatten TPNG eingeführt, weil N-GG in dynamischen Spielen ...

  ... unplausibel erschien (unglaubwürdige Drohungen)

- TPNG schliesst unglaubwürdige Drohungen aus ...

  ... in Spielen unter <u>vollkommener</u> Information

- In Spielen unter <u>unvollkommener</u> Information ...

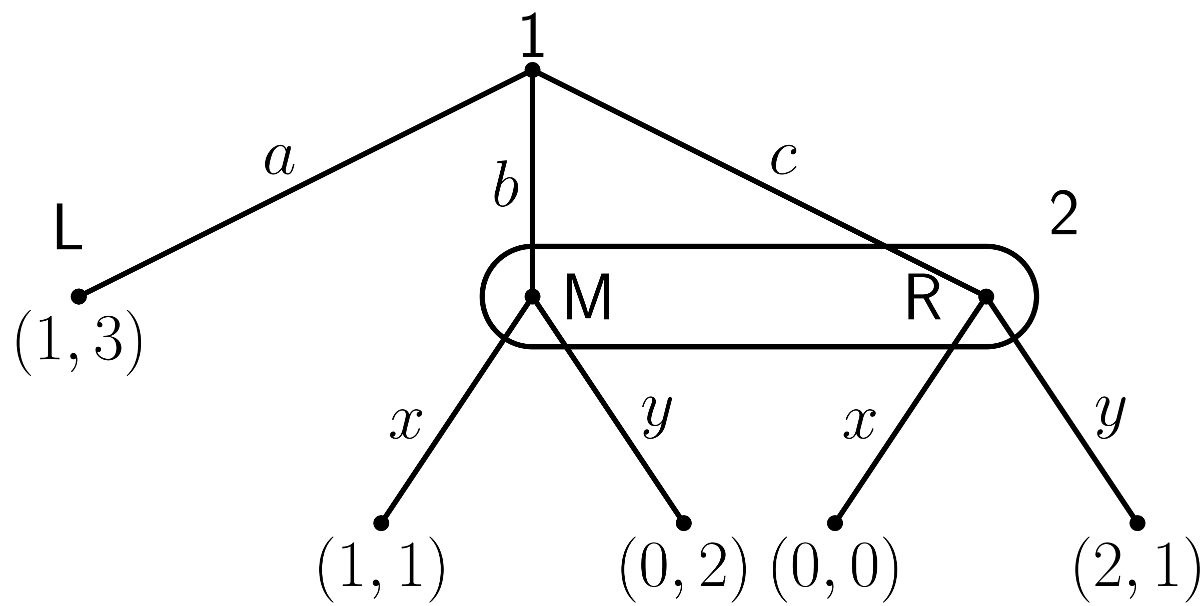
  ... kommt das Problem unglaubwürdiger Drohungen aber zurück

- Wir werden deshalb ein neues GG-Konzept einführen

  – Pefektes Bayesianisches Nash-Gleichgewicht

Unglaubwürdige Drohungen unter <u>un</u>vollkommener Info

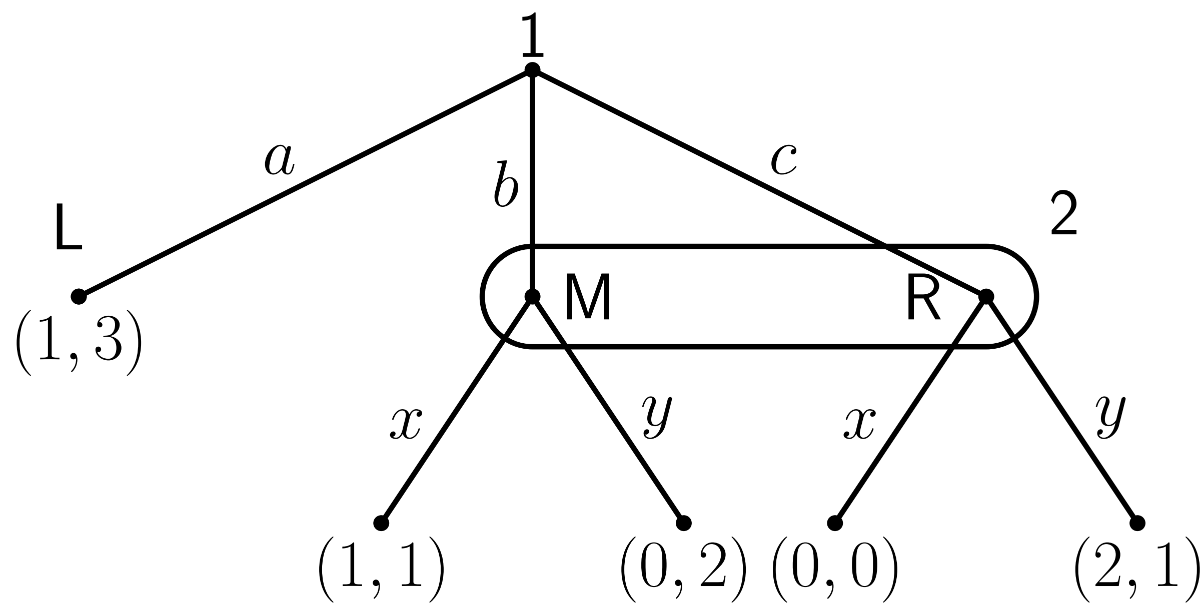
Beispiel 1



- Offenbar: Nur ein T-Spiel $\longrightarrow$ zwei Nash-GG: (a, x), (c, y)
  - Beachte: (a, x) basiert auf der Drohung von SP2, x zu spielen
- Aber x ist unglaubwürdig, denn x ist strikt <u>dominiert</u>, d.h.
  - Wenn SP2 glaubt, er ist an Knoten M: y besser als x
  - Wenn SP2 glaubt, er ist an Knoten R: y besser als x

Unglaubwürdige Drohungen

Beispiel 1



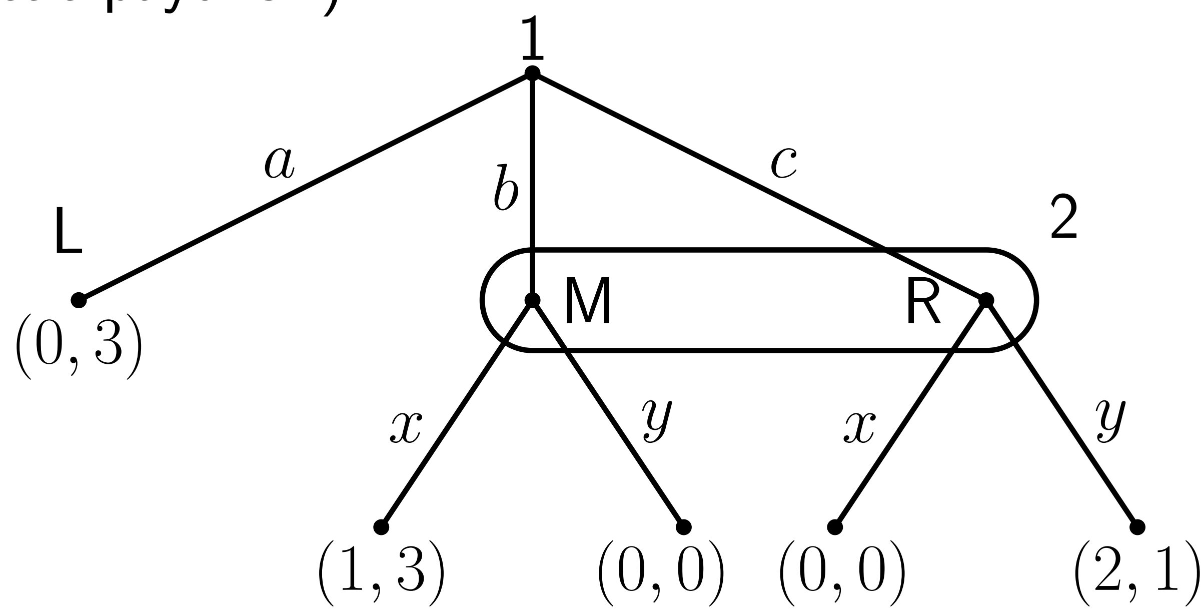
- Also sollte SP1 sich sagen:
  - wenn SP2 am Zuge ist, spielt er niemals x, sondern y
  - also sollte ich c spielen $\rightarrow$ damit (a, x) unplausibel
- Argument: x ist unglaubwürdig, weil x dominiert ist, ...

  ... <u>wenn</u> die Infomenge von SP2 erst mal erreicht ist
- Werden im folgenden diese Überlegungen systematisch entwickeln

Betrachte noch mal Beispiel 1

- SP1 kann das Verhalten von SP2 prognostizieren, ...
  - ... da SP2 eine dominante Strategie hat
- Was aber, wenn SP2 keine dominante Strategie hat?
  - Wie wird sich dann SP2 verhalten, wenn er am Zug ist?

Beispiel 2 (neue payoffs!!)



- Beachte: x ist nicht mehr dominiert, denn:
  - wenn SP2 glaubt, er ist an Knoten M: x besser als y
  - wenn SP2 glaubt, er ist an Knoten R: y besser als x
- Also hängt die optimale Aktion für SP2 davon ab ...

  ... was er glaubt, wo er ist: an M oder an R [wo bin ich?]
- Wie formuliert SP2 Erwartungen darüber, wo er ist?

Sequentielle Rationalität und Bayesianische Konsistenz

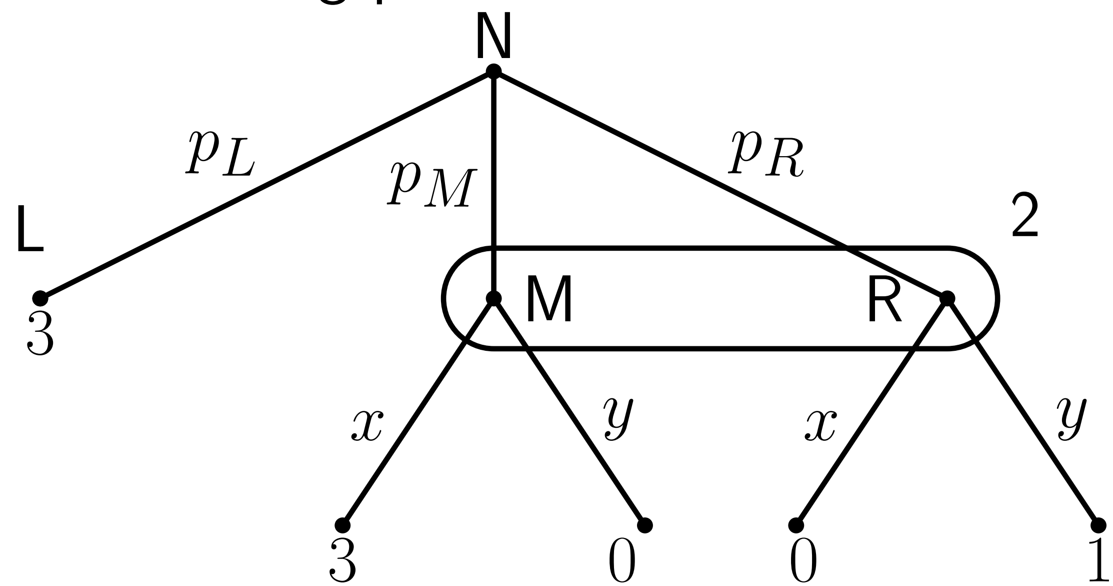
- Wir werden ein Lösungskonzept entwickeln, in dem gilt:
  - Die Spieler aktualisieren permanent ihre Einschätzung darüber, ...

    ... wo sie sich im Spielbaum befinden
  - Dazu verwenden sie alle Information, die im Spielverlauf offenbar wird
- Um dies deutlich zu machen, beginnen wir mit einer Vorüberlegung
- Überlegen uns erst, was Aktualisierung der Sicht der Dinge bedeutet...

  ... in einem nicht-strategischen Ein-Personen Entscheidungsproblem, ...

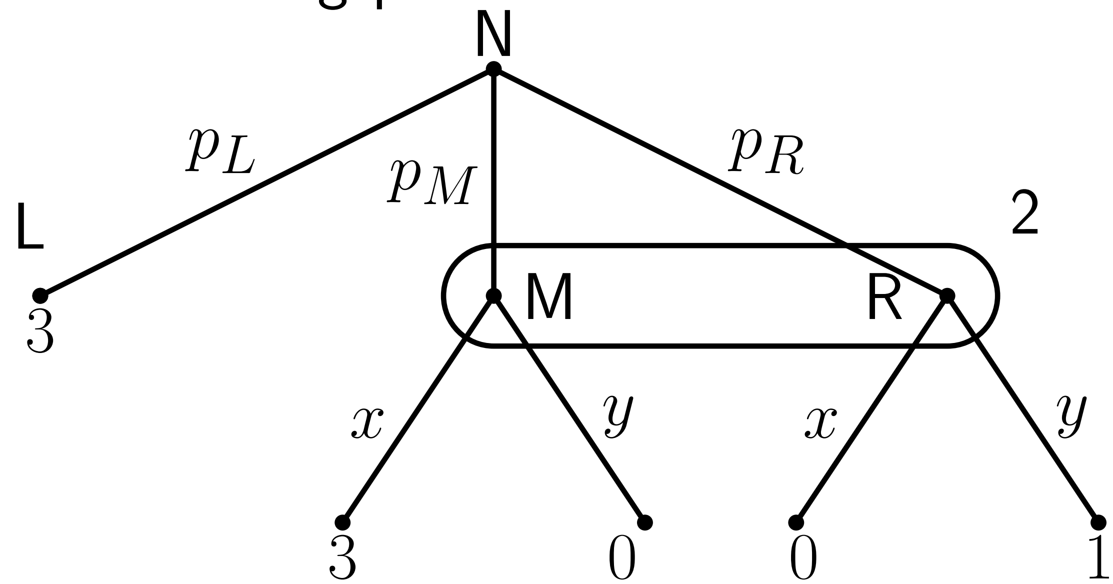
  ... in dem SP2 gegen Natur spielt

Beispiel 3 Ein Entscheidungsproblem



- Betrachte SP2: Was sollte er tun, wenn er dran ist?
  - an M ist x optimal, aber an R ist y optimal
- Aber SP2 weiss nicht, ob er sich an M oder an R befindet
- Wir nehmen an: er hat Wkts - "Beliefs" darüber, wo er sich befindet:
  - sei μ_M sein Belief, dass er sich an M befindet
  - sei μ_R sein Belief, dass er sich an R befindet

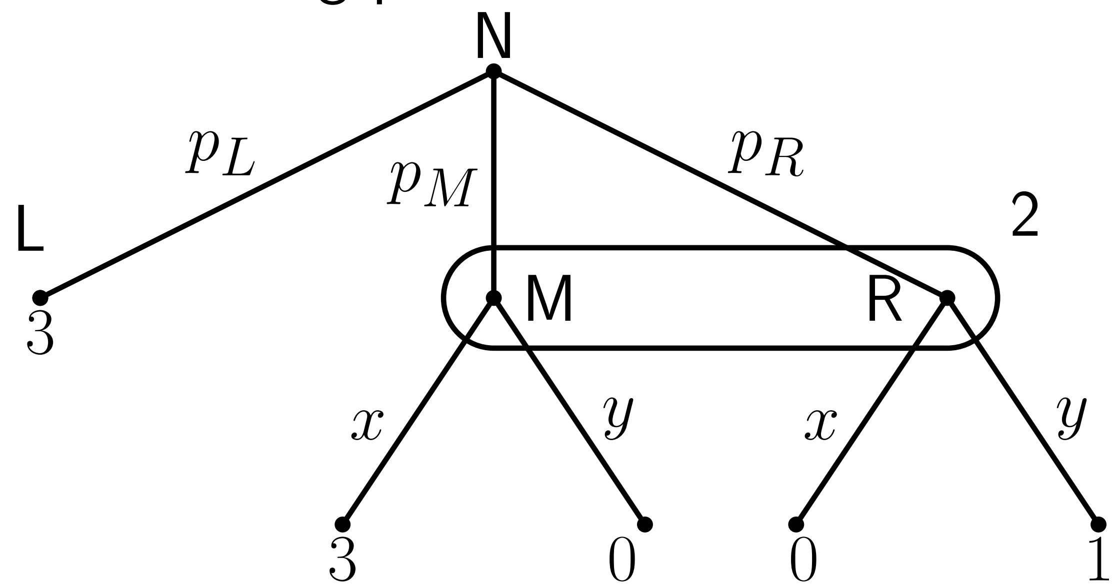
Beispiel 3 Ein Entscheidungsproblem



- Gegeben diesen Belief $\mu = (\mu_M, \mu_R)$:
  - ◇ x liefert den Erw-Nutzen: $3 \cdot \mu_M + 0 \cdot \mu_R$
  - ◇ y liefert den Erw-Nutzen: $0 \cdot \mu_M + 1 \cdot \mu_R$
- Also (mit $\mu_M = 1 - \mu_R$): spiele x, wenn $\mu_M \geq 1/4$
- Ein SP, der eine optimale Aktion wählt, gegeben seine Beliefs, heisst

sequentiell rational

Beispiel 3 Ein Entscheidungsproblem



- Aber woher kommen die Beliefs μ?
- Wenn SP2 dran ist, weiss er: N hat nicht L gewählt
- Also: Wkt, dass N M gewählt hat, bedingt darauf, dass SP2 am Zug ist:

$$\mu_M = \frac{p_M}{p_M + p_R}$$

Beispiel 3 Ein Entscheidungsproblem

- Analog $\mu_R = \frac{p_R}{p_M + p_R}$
- Ein SP, der seine Beliefs mittels bedingter W-keiten herleitet, heisst

  Bayesianisch konsistent (oder Bayesian updater ...)

- Die Formel für bedingte Wkt ist auch bekannt als <u>Bayes' rule</u>
- Allgemein gilt: Enthält eine Info-menge die Knoten $k = 1, 2, ..., n$
  - ... und wird jeder Knoten k mit (a priori-) Wkt p_k erreicht ...
  - ... dann ist die Wkt, sich an Knoten k zu befinden, <u>bedingt</u> darauf,

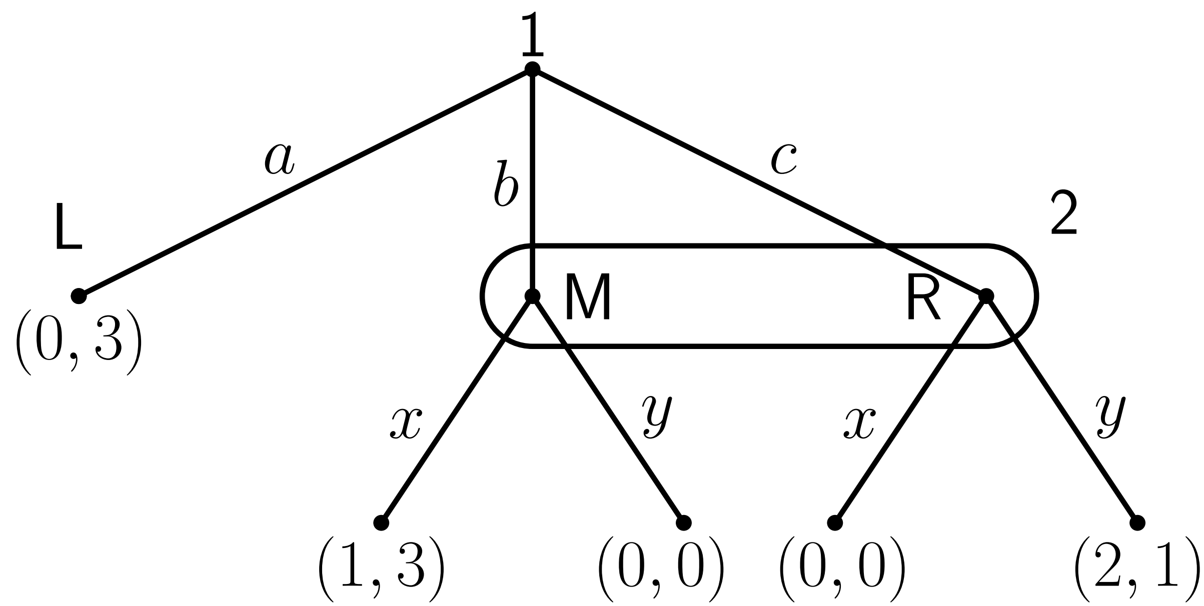
  dass man in der Info-menge ist:

$$\mu_k = \frac{p_k}{p_1 + \ldots + p_n}$$

Erwartungsbildung an nicht erreichten Info-mengen

- Beachte: Bayes' rule nur anwendbar, falls $p_1 + \ldots + p_n > 0$
  - d.h. falls die Info-menge überhaupt mit pos. Wkt erreicht wird
  - (Beachte: $p_1 + \ldots + p_n =$ (a priori) Wkt, dass Info-menge erreicht)
- **Annahme**: Wenn $p_1 + \ldots + p_n = 0$, kann der SP seine Beliefs beliebig wählen
- Damit wissen wir, was ...
  - ... sequentielle Rationalität und Bayesianische Konsistenz
  - ... in <u>Entscheidungsproblemen</u> (gegen N) bedeutet
- Was bedeutet es nun in <u>Spielen</u>?

Beispiel 2

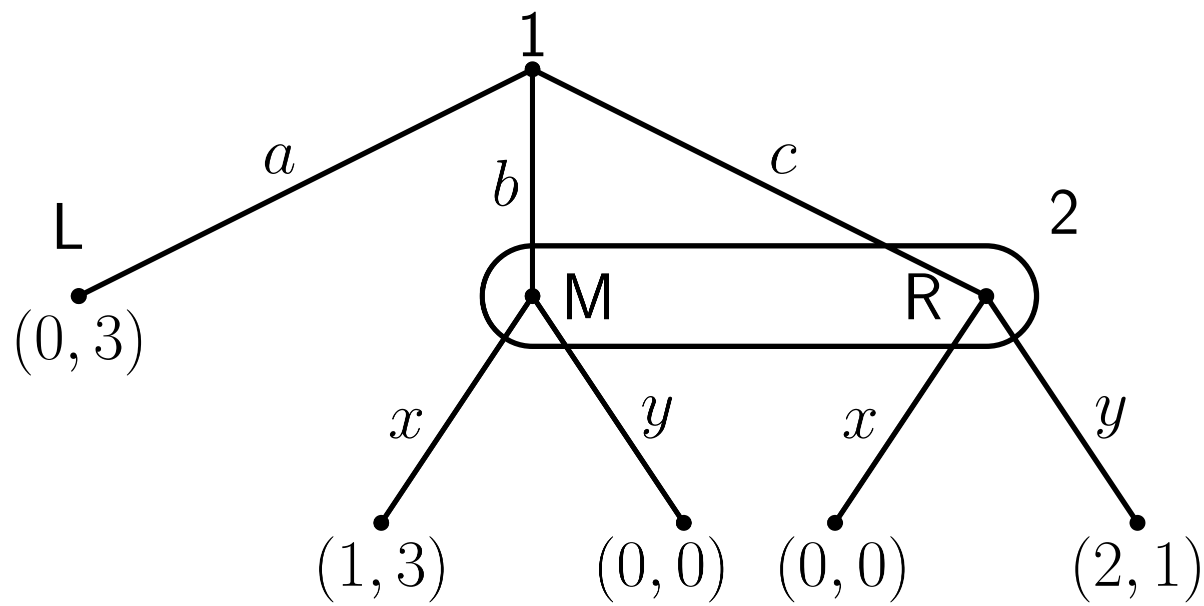


- Angenommen, SP2 erwartet, dass SP1 eine bestimmte Strat spielt
  - sagen wir s_1 so dass: a mit Wkt α, b mit β, c mit γ
- Für SP2 ist die Situation dann analog zu einem Entscheidungsproblem:

  ◇ $\mu_M = \beta/(\beta+\gamma)$, $\mu_R = \gamma/(\beta+\gamma)$ [Ann: $\beta+\gamma>0$]

  $\longrightarrow$ optimale Aktion: $s_2^* = x$ falls $\mu_M \geq 1/4$ (und $s_2^* = y$ sonst)
- MaW: SP2 spielt eine beste Antwort s_2^* gegen seine Erwartung s_1

Beispiel 2

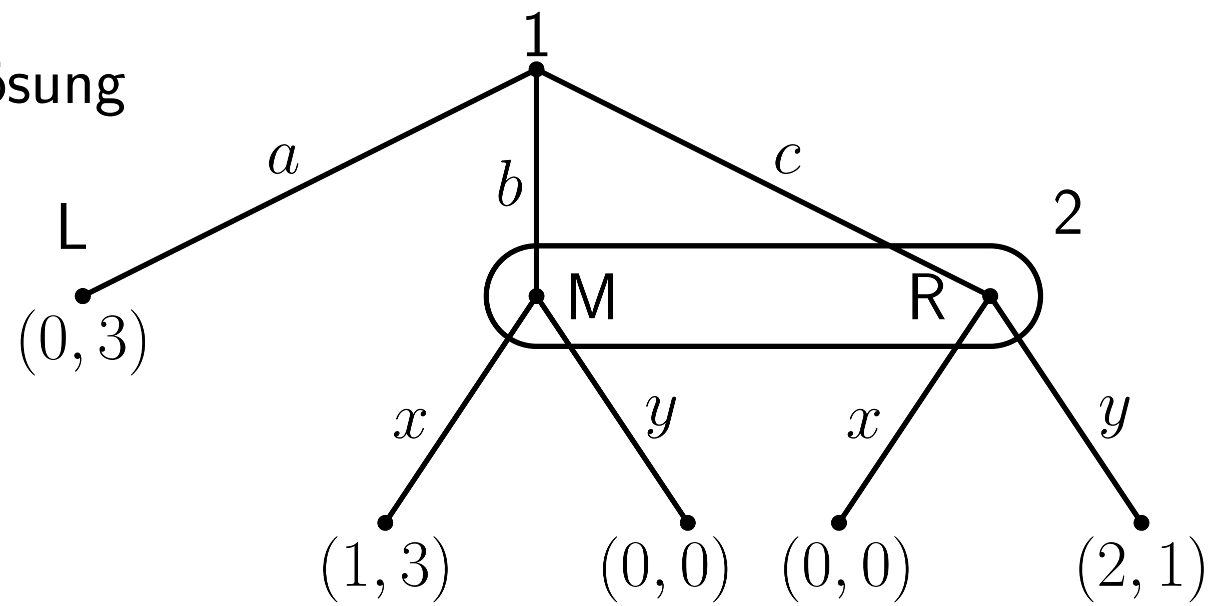


- Betrachte nun SP1
- Angenommen, SP1 <u>erwartet</u>, dass SP2 eine bestimmte Strat spielt
  - sagen wir s_2 so dass: x mit Wkt ξ, y mit θ
- Dann maximiert SP1 seinen Erw-Nutzen gegeben s_2:
  - ◇ a liefert 0, b liefert $1 \cdot \xi + 0 \cdot \theta$, c liefert $0 \cdot \xi + 2 \cdot \theta$
- MaW: SP1 spielt eine <u>beste Antwort</u> s_1^* gegen seine Erwartung s_2
- Was ist nun ein Gleichgewicht?

Gleichgewichtsidee

- Wir wenden nun die uns vertraute Gleichgewichtsinterpretation an
- Ein Gleichgewicht ist ein Zustand, in dem alle Spieler ...
  - ... eine BA auf ihre Erwartungen bez. ihrer Gegenspieler spielen ...
  - ... und diese Erwartungen tatsächlich richtig sind (sich erfüllen)
- Dabei bedeutet "beste Antwort":
  - Gegeben ihre Erwartungen, sind die Spieler ...
  - ... sequentiell rational und Bayesianisch konsistent
- Ein solches GG heisst **Perfektes Bayesianisches Nash-GG** (PBG)

Beispiel 4 Lösung



- Behauptung: das folgende ist ein PBG
  - SP1: $\alpha^* = 0, \quad \beta^* = 1/4, \quad \gamma^* = 3/4$
  - SP2: $\xi^* = 2/3, \quad \theta^* = 1/3$
  - Dabei gilt für die Beliefs von SP2: $\mu_M^* = 1/4, \quad \mu_R^* = 3/4$

Verfikation der Behauptung

- Beginne bei SP1

- Gegeben $s_2^* = (\xi^*, \theta^*)$:

  ◇ a liefert 0, b liefert $1 \cdot (2/3)$, c liefert $2 \cdot (1/3)$

  – Also SP1 indifferent zwischen b und c

  $\longrightarrow$ Alle Strategien mit $\alpha = 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma > 0$ sind beste Antwort

  – (Gleiches Argument wie bei N-GG in gemischten Strat)

- Damit Behauptung für SP2 gezeigt

Verfikation der Behauptung

- Betrachte SP2 und sei $s_1^* = (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$ gegeben
- Schritt 1: Beliefs konsistent gegeben s_1^* ?
  - Bayes' rule: $\mu_M = \beta^*/(\beta^* + \gamma^*) = 1/4$

  $\rightarrow \quad \mu_M^*$ tatsächlich konsistent
- Schritt 2: Aktion sequentiall rational? (d.h. optimal gegeben Beliefs)

  ◇ x liefert $\mu_M^* \cdot 3 = 3/4, \qquad y$ liefert $\mu_R^* \cdot 1 = 3/4$

  ◇ also SP2 indifferent zwischen x und y

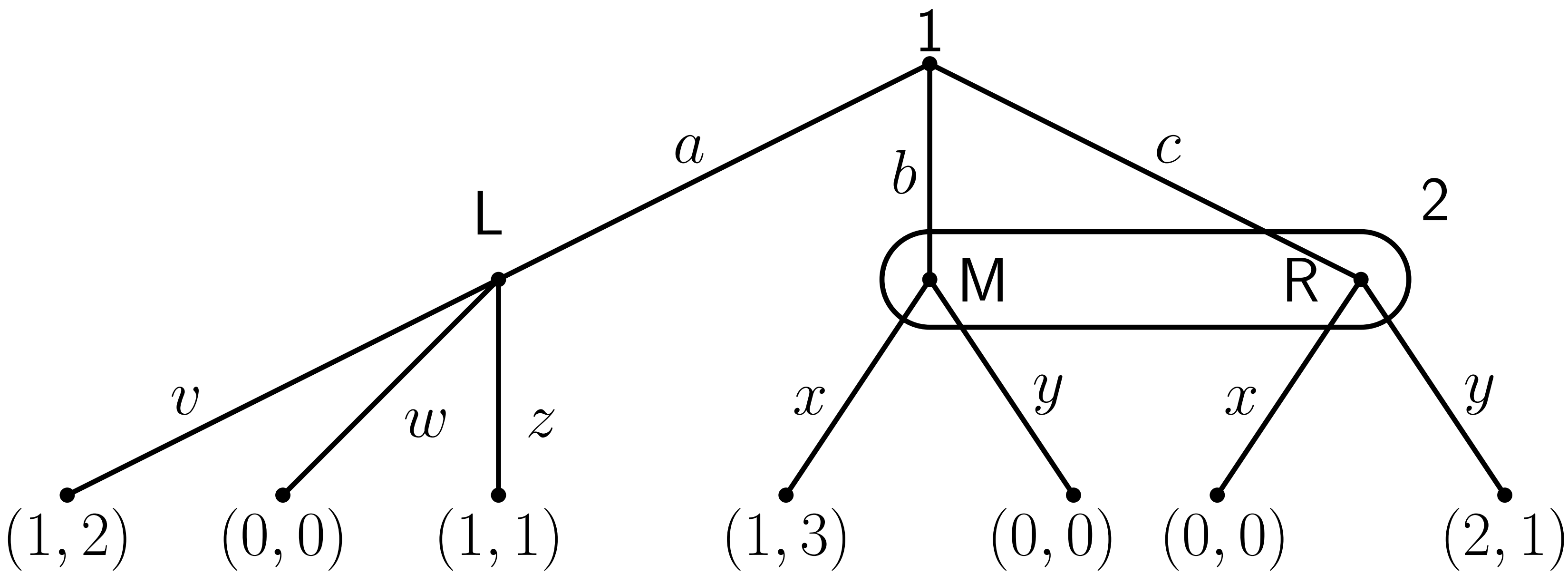
  $\rightarrow$ Alle Strategien mit $\xi > 0, \theta > 0$ sind BA
- Damit Behauptung auch für SP2 gezeigt

Andere PBGe in Beispiel 4

- Es gibt auch noch PBGe in reinen Strategien
  - SP1: $\alpha^* = 0, \quad \beta^* = 0, \quad \gamma^* = 1$
  - SP2: $\xi^* = 0, \quad \theta^* = 1, \quad \mu_M^* = 0, \quad \mu_R^* = 1$
- Und noch eins:
  - SP1: $\alpha^* = 0, \quad \beta^* = 1, \quad \gamma^* = 0$
  - SP2: $\xi^* = 1, \quad \theta^* = 0, \quad \mu_M^* = 1, \quad \mu_R^* = 0$
- Selber verifizieren (Das sind alle)

Kap 14: Formale Definition von PBG

Wir erläutern Definition anhand des Beispiels 5:



Kap 14: Formale Definition von PBG

Betrachte ein extensives Spiel mit n Spielern und definiere:

- Spieler i habe L_i Info-mengen $I_{i1}, \ldots, I_{iL_i}$

  ◇ In Bsp 5: $I_{11} = \{\text{Wurzel}\}$, $I_{21} = \{L\}$, $I_{22} = \{M, R\}$

- Sei $A_{i\ell}$ die Aktionsmenge von i an der Info-menge $I_{i\ell}$

  ◇ In Bsp 5: $A_{11} = \{\ a,\ b,\ c\}$, $A_{21} = \{\ v,\ w,\ z\}$, $A_{22} = \{\ x,\ y\}$

- Eine (gemischte) **Verhaltensstrategie** für SPi

$$\sigma_i = (\ \sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{iL_i}\ )$$

  spezifiziert für jede Info-menge $I_{i\ell}$ eine Wkts-verteilung über $A_{i\ell}$

  ◇ In Bsp 5: $\sigma_{11} = (\ \alpha,\ \beta,\ \gamma)$, $\sigma_{21} = (\ \varphi,\ \omega,\ \zeta)$, $\sigma_{22} = (\ \xi,\ \theta\ )$

  – wobei etwa $\omega =$ Wkt, mit der SP2 an I_{21} Aktion w spielt etc

Formale Definition von PBG

Definiere weiterhin:

- Ein Belief-System für SPi

$$\mu_i = (\ \mu_{i1}, \ldots, \mu_{iL_i}\ )$$

  spezifiziert für jede Info-menge $I_{i\ell}$ eine Wkts-Verteilung über die Knoten in dieser Info-menge

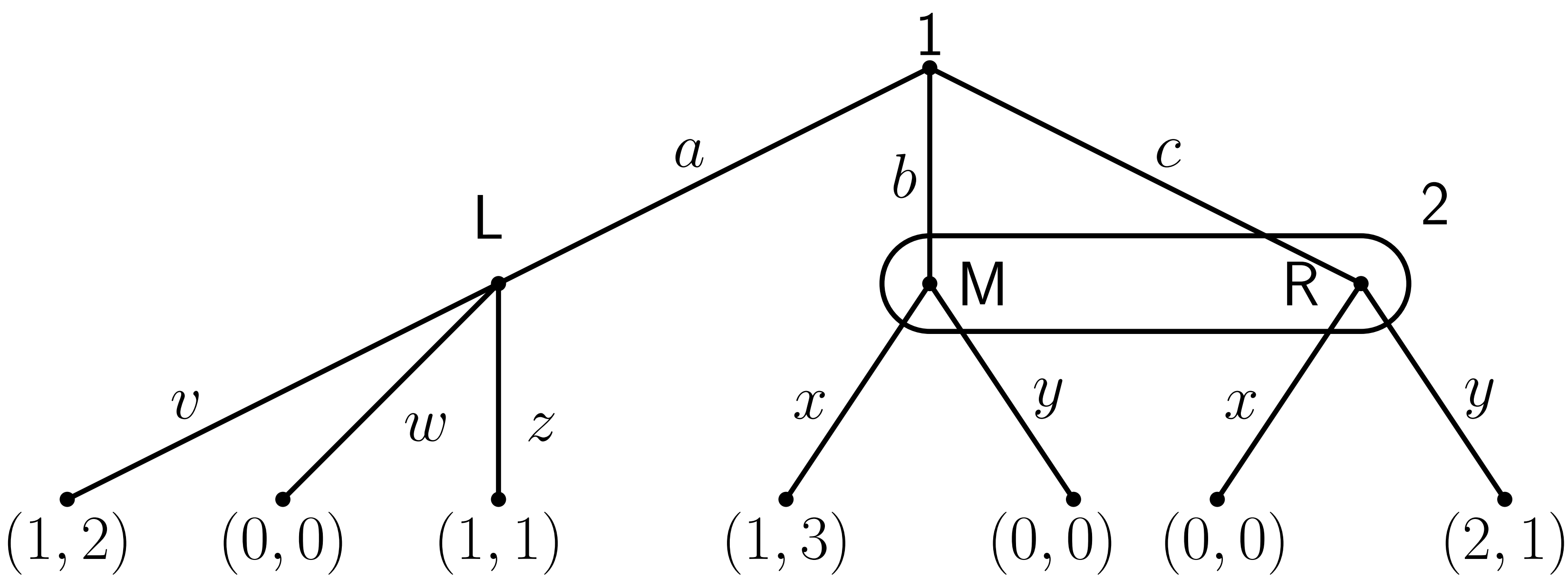
  ◇ in Bsp 5: $\mu_{11} = \mu_W,\ \ \mu_{21} = \mu_L,\ \ \mu_{22} = (\ \mu_M,\ \mu_R\ )$

  – wobei etwa $\mu_R =$ Wkt, dass SP2 in I_{22} am Knoten R ist

  – insbesondere $\mu_W = 1,\ \ \mu_L = 1$ (triviale Info-menge)

Formale Definition von PBG

- Jedes Strategienprofil $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ induziert eine Wkt, mit der ein bestimmter Knoten im Spielbaum erreicht wird



- Sei $\sigma_{11} = (\ \alpha,\ \beta,\ \gamma),\ \ \sigma_{21} = (\ \varphi,\ \omega,\ \zeta),\ \ \sigma_{22} = (\ \xi,\ \theta\ )$
  - Wkt, dass 3. Endknoten erreicht wird $=\ \ \alpha \cdot \zeta$
  - Wkt, dass M erreicht wird $=\ \ \beta$ [usw]
- Wkt wird ausgerechnet wie in einem Ereignisbaum

Definition von PBG: Sequentielle Rationalität

Für ein gegebenes Strategienprofil $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ und Belief-System μ_i definiere:

- Die Strategie σ_i für SPi ist **sequentiell rational**, wenn sie ...
  - ... an jeder Info-menge $I_{i\ell}$ ...
  - ... den Erw-Nutzen von SPi maximiert
- Dabei verwendet Spieler i seine Beliefs μ_i und das Profil σ, um ...

  ... die Wkt zu berechnen, mit der ein bestimmter Endknoten erreicht wird

Definition von PBG: Bayesianische Konsistenz

Für ein gegebenes Strategienprofil σ und Belief-System μ_i definiere:

- Das Belief-System μ_i ist **Bayesianisch konsistent**, wenn es ...
  - ... an allen Info-mengen, ...
  - ... die unter σ mit strikt positiver Wkt erreicht werden,...
  - ... durch Bayes' rule hergeleitet wird
- d.h. für einen Knoten K in der Info-Menge $I_{i\ell}$ ...
  - ... ist $\mu_{i\ell}(K)$ die Wkt, dass sich SPi am Knoten K befindet,...
  - ... bedingt darauf, dass $I_{i\ell}$ ereicht wird:

$$\mu_{i\ell}(K) = P[K \mid I_{i\ell} \text{ erreicht }] = \frac{P[\ K \ \text{ wird erreicht unter } \sigma]}{P[\ I_{i\ell} \text{ erreicht unter } \sigma]}$$

Definition von PBG:

Ein **Perfektes Bayesianisches Gleichgewicht** ist ein

Strategienprofil σ^* und ein

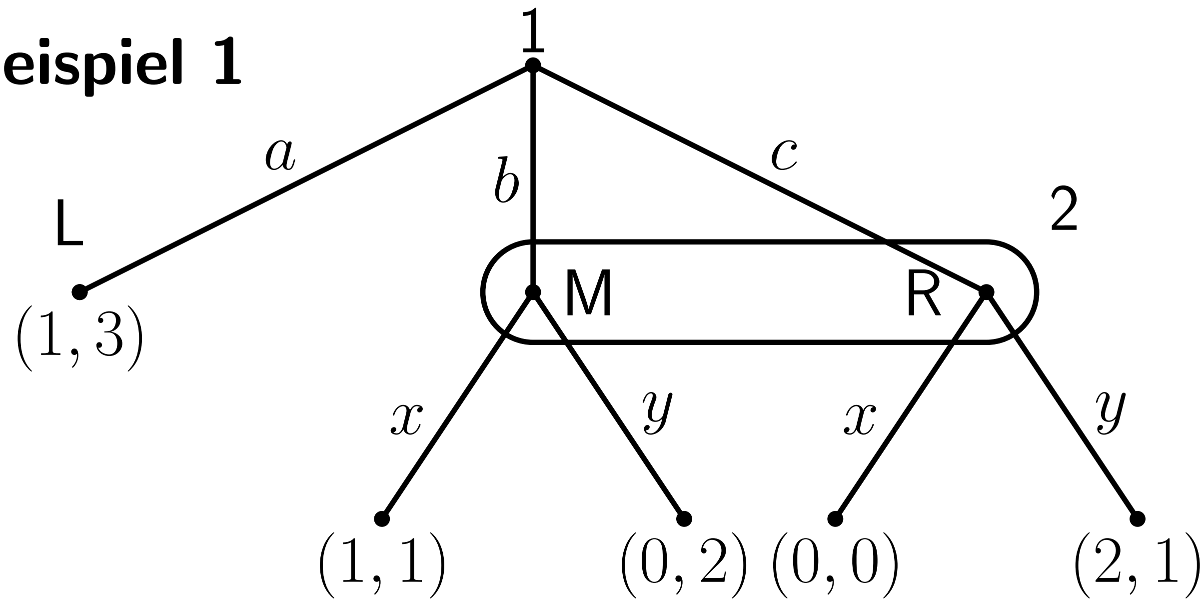
Profil von Belief-Systemen $\mu^* = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, so dass gilt:

- σ_i^* ist sequentiell rational gegeben σ^* und μ_i^*
- μ_i^* ist Bayesianisch konsistent gegeben σ^*

– Beachte: Belief-System ist Teil des GG

  – Grund: andernfalls kann man sequentielle Rationalität nicht überprüfen

Zurück zu Beispiel 1



- Hatten informell argumentiert, dass (a, x) unplausibel ist
  - wollen dies nun formal verifizieren
- Behauptung: Es gibt kein PBG, in dem a mit positiver Wkt gespielt wird

Verifikation der Behauptung

- Betrachte irgendein PBG gegeben durch
  - SP1: α^*, β^*, γ^*; SP2: ξ^*, θ^*, μ_M^*, μ_R^*
- Betrachte SP2. Für μ^* gilt

  ◇ x liefert: $\mu_M^* \cdot 1 + \mu_R^* \cdot 0$ y liefert: $\mu_M^* \cdot 2 + \mu_R^* \cdot 1$

  $\longrightarrow$ y besser als x für alle μ^* [Dominanz!]

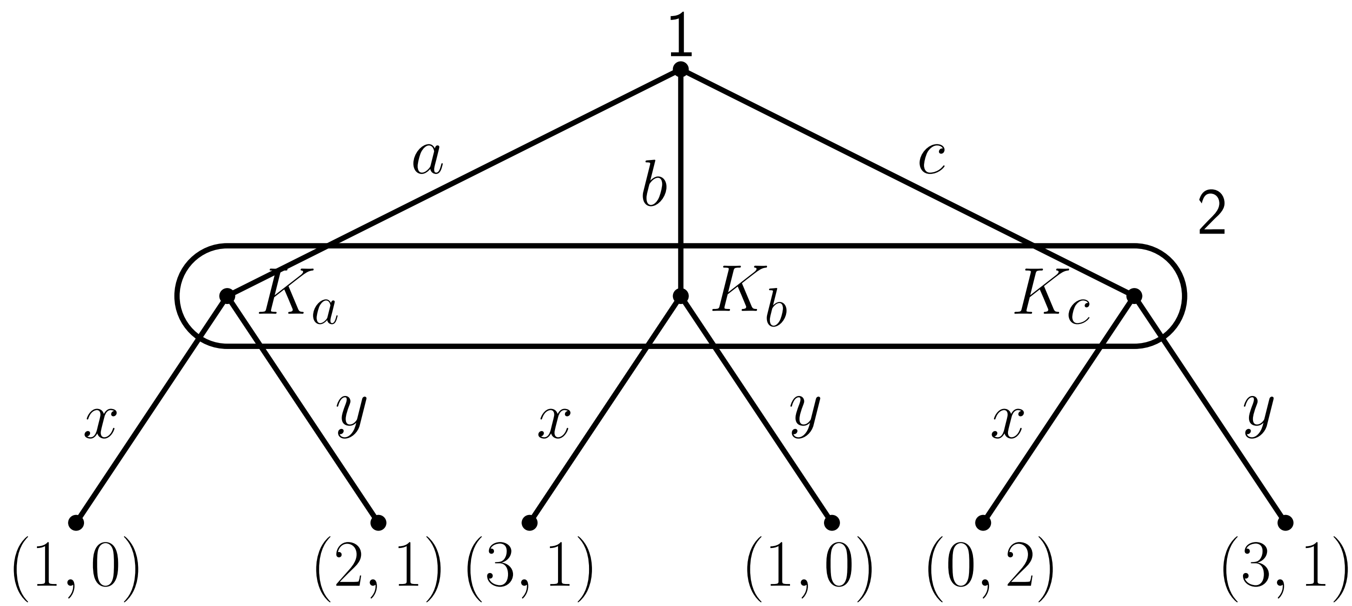
  - Sequ Ratio: $\longrightarrow$ $\xi^* = 0$, $\theta^* = 1$
- Betrachte nun SP1. Gegeben $\xi^* = 0$ gilt:

  ◇ a liefert 1 b liefert 0 c liefert 2

  - also: $\alpha^* = 0$, $\beta^* = 0$, $\gamma^* = 1$ ist beste Antwort

Neue Perspektive auf das statische N-GG

- Wir können das statische N-GG als PBG interpretieren
  - dazu betrachten wir ein simultanes Spiel in extensiver Form ...
  - ... und spezifizieren die Beliefs der Spieler <u>explizit</u>
- Beispiel 6



Neue Perspektive auf das statische N-GG

- In Beispiel 6: nur ein Teilspiel $\longrightarrow$ adäquates Lösungskonzept: Nash–GG
- Wir motivieren nun das Nash–GG im Geiste von PBG
- Betrachte SP2: wir können sein Verhalten so beschreiben:
  - SP2 formuliert Beliefs $\quad \mu = (\mu_a, \mu_b, \mu_c)$
  - Gegeben μ, wählt er eine optimale Strategie
- Dies liefert

$$\sigma_2^*(\mu) = \begin{cases} x & \text{falls } 2\mu_b > 1 - 2\mu_c \\ x \text{ oder } y & \text{falls } 2\mu_b = 1 - 2\mu_c \\ y & \text{sonst} \end{cases}$$

Neue Perspektive auf das statische N-GG

- Analog für SP1
  - SP1 formuliert Beliefs $\nu = (\nu_x, \nu_y)$
  - Gegeben ν, wählt er eine optimale Strategie
- Dies liefert

$$\sigma_1^*(\nu) = \begin{cases} c & \text{falls } \nu_x \in [0, 2/5) \\ c \text{ oder } b & \text{falls } \nu_x = 2/5 \\ b & \text{falls } \nu_x \in (2/5, 1] \end{cases}$$

Neue Perspektive auf das statische N-GG

- Ein Spieler ist rational, wenn er eine optimal Strategie wählt ...

  ... <u>gegeben</u> seine Beliefs

- Rationalität alleine schreibt aber (fast) nicht vor, ...

  ... wie ein Spieler seine Beliefs formulieren sollte

- Das Nash–GG beschreibt nun einen Zustand, in dem ...
  - ... die Spieler rational sind, und
  - ... ihre Erwartungen <u>korrekt</u> sind

- Man sagt auch: “im Nash–GG weiss ein Spieler, was der andere spielt”

Neue Perspektive auf das statische N-GG

- Formal könnten wir das auch so sagen:

- Ein Nash–GG ist ein Kombination $(\sigma_1, \nu), (\sigma_2, \mu)$ ...

  ... von Strategien und Beliefs für SP1 und SP2, so dass gilt:

  – jeder SP ist rational: $\sigma_1 = \sigma_1^*(\nu)$, $\sigma_2 = \sigma_2^*(\mu)$

  – die Beliefs der SP sind korrekt: $\nu = \sigma_2$, $\mu = \sigma_1$

- In unserer ursprünglichen Definition des N-GG hatten wir ...

  ... den Umweg über die Spezifikation expliziter Beliefs weggelassen ...

  ... und N-GG direkt als Kombination gegenseitig BAen definiert:

  ◇ $\sigma_1 = \sigma_1^*(\sigma_2)$, $\sigma_2 = \sigma_2^*(\sigma_1)$

Anwendung von PBG: Bertrand-Wettbewerb mit Suchkosten

- Spieler
  - Zwei Verkäufer, V1, V2, und zwei Käufer, K1, K2
  - V produzieren je identisches Gut zu Grenzkosten von $c < 1$
  - Beide Käufer haben Wertschätzung 1 für das Gut
- Spielregeln
  1. V1 und V2 setzen simultan die Preise $p_1, p_2 \in [0, 1]$
  2. Ki beobachtet p_i aber <u>nicht</u> p_{-i}
  3. Ki entscheidet, ob er p_{-i} beobachtet oder nicht
     - Beobachten von p_{-i} kostet $\epsilon \geq 0$ ($\epsilon =$ Suchkosten)
  4. Falls Ki <u>nicht</u> sucht, kauft er bei Vi
     - sonst entscheidet er, bei wem er das Gut kauft

Strategien

- Verkäufer: je ein Preis $p_i \in [0, 1]$
- Käufer K1
  - für jeden Preis p_1 eine Suchentscheidung:

$$t_{K1} : [0, 1] \to \{j, n\}$$

  - für Suchentscheidung "ja" und alle Preise p_1, p_2 ein Verkäufer:

$$b_{K1} : [0, 1]^2 \to \{V1, V2\}$$

- Käufer K2: analog

Beliefs

- K1 unterhält an jeder Info-Menge einen Belief über den Preis p_2
- Es gibt für jeden Preis p_1 eine Info-Menge $I(p_1)$
  - also Beliefs für jeden Preis p_1 spezifizieren
- Da p_2 eine stetige Variable aus $[0, 1]$ ist, formulieren wir Beliefs über p_2 in Form einer Verteilungsfunktion (VF)
- Sei $\mu_1(p_2 \mid p_1)$ die VF, welche die Beliefs von K1 beschreibt
  - d.h. $\quad \mu_1(p_2 \mid p_1) \quad$ ist die Wkt, dass ...

  ... V2 einen Preis kleiner als p_2 gesetzt hat an $I(p_1)$
- für K2 analog

Satz: Für alle positiven Suchkosten $\epsilon > 0$ gibt es im Bertrand-Wettbewerb mit Suchkosten ein PBG, in dem gilt:

– Jeder Verkäufer setzt den Monopolpreis $p_1^* = p_2^* = 1$

– Kein Käufer sucht, und Ki kauft bei "seinem" Verkäufer Vi

Genauer: Die GG-Strategie für K1 ist:

$$t_{K1}^*(p_1) = n \text{ für alle } p_1$$

$$b_{K1}^*(p_1, p_2) = \begin{cases} V1 & \text{falls } p_1 \leq p_2 \\ V2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bitte wenden!

Die Beliefs im GG sind wie folgt:

- Für alle p_1 unterhält K1 den folgenden Belief

  - er glaubt, dass V2 den Preis $p_2 = p_1$ mit Wkt 1 setzt

  - und alle anderen Preise $p_2 \neq p_1$ mit Wkt 0

- Also ist die VF $\mu_1^*(p_2 \mid p_1)$ eine sogenannte <u>degenerierte</u> VF, ...

  ... welche die gesamte Wkts-Masse auf $p_2 = p_1$ hat

  – d.h. $\mu_1^*(p_2 \mid p_1) = 0$ für alle $p_2 < p_1$ und $\mu_1^*(p_2 \mid p_1) = 1$ sonst

Beobachtung

- Resultat gilt für alle positiven Suchkosten ...
  - Suchkosten können sehr, sehr, sehr, sehr ... klein sein
- Minimale "Markt-Friktionen" setzen Wettbewerb vollständig ausser Kraft
- Keine Konvergenz zu Preis=Grenzkosten für $\epsilon \rightarrow 0$, solange $\epsilon > 0$
- Resultat ist als Diamond-Paradox bekannt

Was passiert intuitiv?

- Vollständiger Wettbewerb basiert darauf, dass die Firmen ...

  - ... sich gegenseitig so lange unterbieten bis Preis bei c ankommt

- Warum reduziert jetzt, z.B. V2 seinen Preis nicht?

  – Beachte: Im GG sucht K1 nicht $\rightarrow$ K1 "sieht" Preisreduktion nicht

  $\rightarrow$ Preisreduktion erhöht nicht die Nachfrage

- Warum sucht der Käufer nicht?

  – Im GG erwartet K, dass beide Vs denselben Preis setzen

  $\rightarrow$ Suchen lohnt sich nicht

Schritt 1. Verifikation des Satzes für V

- Wir zeigen: Kein V kann profitabel vom Kandidaten-GG abweichen

- Betrachte V1: im Kandidaten GG erzielt V1 den Nutzen $1 - c$

- Hat V1 eine profitable Abweichung noch oben: $p_1 > p_1^* = 1$??

  - nein, sonst würde kein K kaufen

- Hat V1 eine profitable Abweichung nach unten: $p_1 < p_1^* = 1$??

  – K1 kauft nach wie vor bei V1

  – K2 kauft nach wie vor bei V2 !! [entscheidender Punkt]

  - Im GG glaubt K2, dass V2 den Preis $p_2 = p_1^* = 1$ mit Wkt 1 setzt

  $\rightarrow$ Grund: K2 beobachtet p_1 nicht, also: passt Beliefs nicht an!

  $\rightarrow$ Abweichungsnutzen $p_1 - c < 1 - c \quad \rightarrow \quad$ nicht profitabel

Schritt 2. Verifikation für K1: Sequentielle Rationalität

- Müssen Optimalität der Strategien b^*, t^* nachprüfen

- Die Strategie $b^*_{K1}(p_1, p_2)$ ist offensichtlich optimal

- Betrachte Suchentscheidung t^* für den gegebenen GG-Belief $\mu_1^*(p_2 \mid p_1)$

  – Gegeben ein beliebiges p_1 glaubt K1, dass ....

  ...V2 <u>denselben</u> Preis $p_2 = p_1$ mit Wkt 1 spielt

  $\rightarrow$ "n" bringt E-Nutzen $1 - p_1$

  $\rightarrow$ "j" bringt E-Nutzen $1 - p_1 - \epsilon$

  – Also ist $t^*_{K1}(p_1) = n$ sequentiell rational

Schritt 3. Verifikation für K1: Bayesianische Konsistenz

- Müssen zeigen: an jeder Info-menge auf dem GG-Pfad gilt
  - Beliefs genügen Bayes' Rule
- In der Tat: auf dem GG-Pfad gilt $p_2^* = 1$ [reine Strategie]

  $\rightarrow$ degenerierte Verteilung, welche die ...

  ... gesamte Wkts-Masse auf $p_2^* = 1$ hat, ist konsistent
- An Info-Mengen ausserhalb des GG-Pfades gilt $p_1 < 1$
  - Beliefs können beliebig spezifiziert werden
- Damit alles gezeigt

Zur Rolle von Beliefs in PBG

- Bayes' rule spezifiziert die Beliefs eines Spielers nur ...

  - ... an Info-Mengen, die mit positiver Wkt erreicht werden

- An Info-Mengen, die nicht erreicht werden ...

  – ... können die Beliefs beliebig spezifiziert werden

- Bereits bei Teilspielperfektheit gesehen:

  – was an Knoten passiert, die <u>nicht</u> erreicht werden, ...

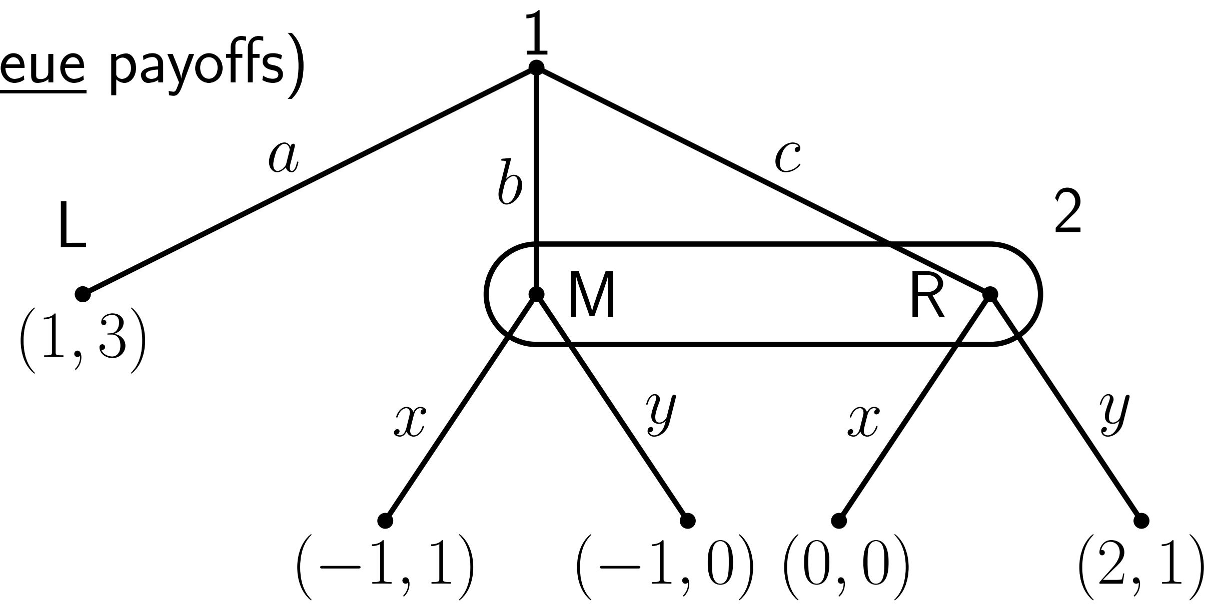
  ... hat Auswirkung auf das Verhalten an Knoten, ...

  ... die <u>tatsächlich</u> erreicht werden

- Dies ist bei PBG ähnlich ... und kann zu sonderbaren Effekten führen

- Das folgende Beispiel soll das illustrieren

Beispiel 7 (<u>neue</u> payoffs)



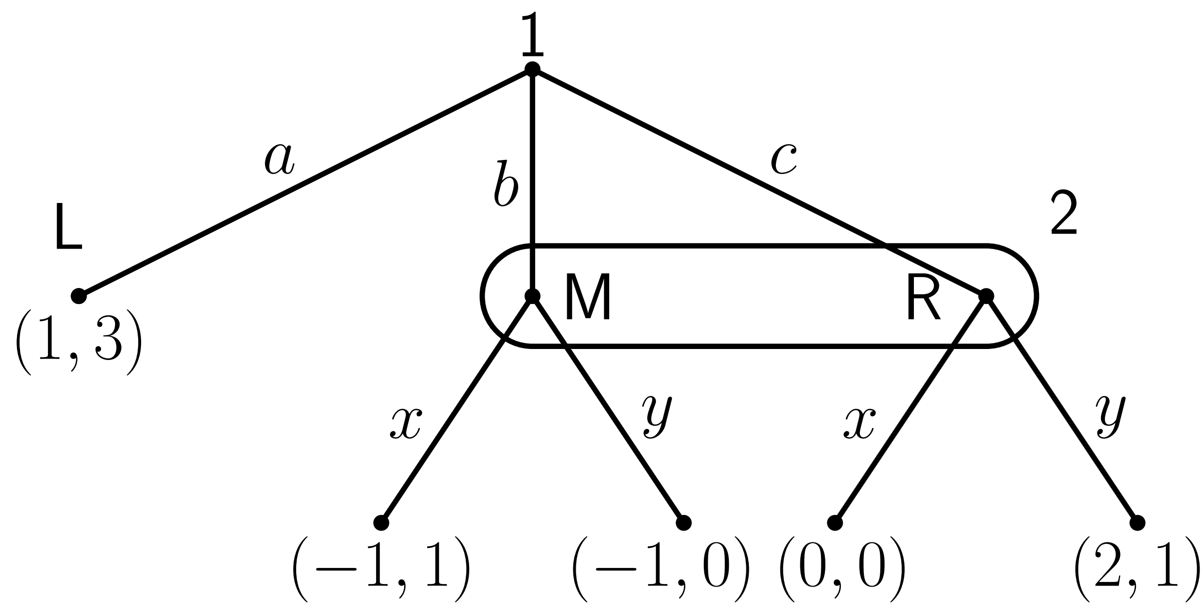
- Behauptung: Es gibt ein PBG, in dem SP1 a und SP2 x spielt
- Das PBG sieht so aus:
  - SP1: $\alpha^* = 1, \;\; \beta^* = 0, \;\; \gamma^* = 0$
  - SP2: $\xi^* = 1, \;\; \theta^* = 0, \;\; \mu_M^* = 1, \;\; \mu_R^* = 0$
- Werden argumentieren, dass das GG nicht plausibel ist

Verifikation, dass das ein PBG ist

- SP2: $\xi^* = 1, \;\; \theta^* = 0$ sequentiell rational gegeben μ^* ??
  - Ja, denn gegeben μ^*: x liefert 1 y liefert 0
- SP2: Beliefs konsistent gegeben die Strategie von SP1 ??
  - Beachte: Info-Menge wird mit Wkt 0 erreicht unter $\alpha^* = 1$
  - also alle Beliefs konsistent, insbesondere μ^*
- SP1: $\alpha^* = 1$ optimal gegeben $\xi^* = 1$??
  - Ja, denn gegeben $\xi^* = 1$:

  $\diamond$ a liefert 1 b liefert –1 c liefert 0
- Damit alles gezeigt

Beispiel 7



- Inwiefern ist das GG unplausibel?
- Beachte: Aktion b ist strikt dominiert für SP1
  - Dennoch glaubt SP2, dass SP1 b gespielt hat, ...
  - ... <u>wenn</u> die Info-Menge erreicht wird ($\mu^*_M = 1$)
- SP2 kann das glauben, weil die Info-Menge im GG nicht erreicht wird
  - und PBG für diesen Fall <u>alle möglichen</u> Beliefs von SP2 zulässt

Drohungen durch Beliefs ausserhalb des GG-Pfades

- Man sagt: Die GG-Strategie (a, x) wird gestützt durch den

  off-equilibrium-path Belief $\mu_M^* = 1$

- Die GG-Strategie (a, x) basiert auf einer Art Drohung von SP2 an SP1:
  - wenn du b oder c spielst, dann glaube ich, dass du b gespielt hast,
  - dann spiele ich x, denn das ist dann für mich optimal
- Diese Drohung ist nicht besonders überzeugend, aber ...
  - ... nicht, weil die Wahl von x unglaubwürdig ist, ...
  - ... sondern weil SP2s Belief “unglaubwürdig“ bzw. unplausibel ist

  (- denn es ist unplausibel, dass SP1 die dominierte Strat. b wählt)

Drohungen durch Beliefs ausserhalb des GG-Pfades

- Das PBG-Konzept schliesst aber solche unplausiblen Beliefs nicht aus
- Nächster Schritt:
  - Formuliere Restriktionen auf die Beliefs an Info–mengen, ...

  ... die nicht erreicht werden
- Dies führt zu Verfeinerungen des PBG-Konzepts
  - kann man machen, wir belassen es aber hierbei