KAP 15. Spiele unter unvollständiger Information

- Bisher angenommen: jeder Spieler kennt alle Teile des Spiels

  – seine Gegenspieler, deren Aktionen, deren Nutzen, seinen eigenen Nutzen etc.

- Oft kennt man aber z.B. den Nutzen seines Gegenspielers nicht

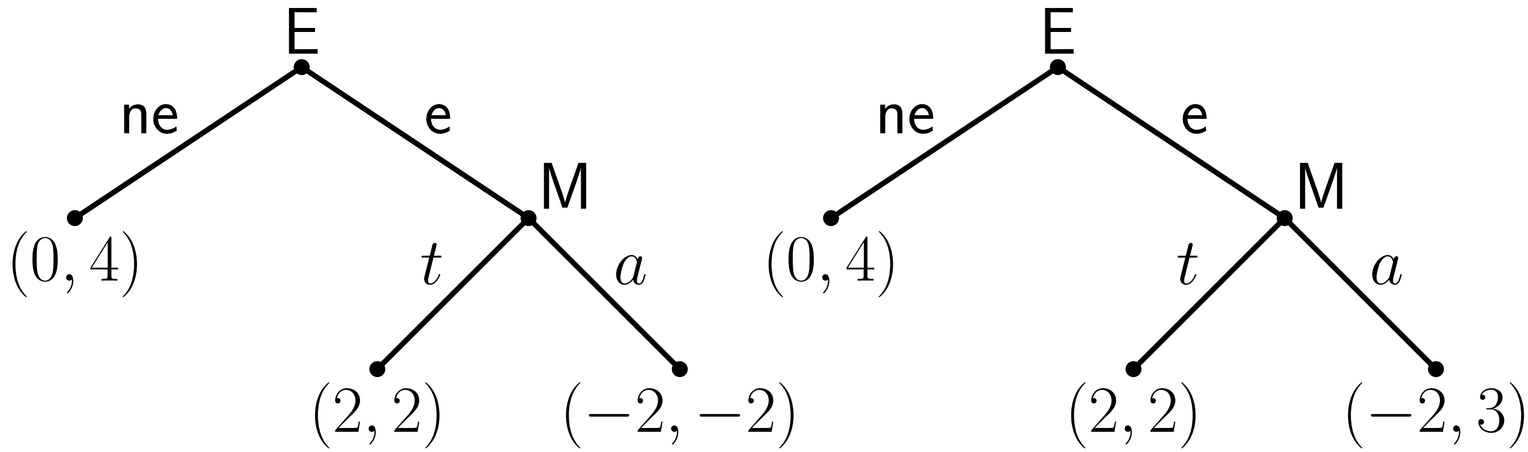
  - Kostenstruktur des Konkurrenten

  - Diskontfaktor des Verhandlungspartners

  - Wertschätzung anderer Bieter in einer Auktion

- Dann herrscht **unvollständige** Information über die Nutzenfunktion der Gegenspieler

Beispiel 1: Markteintritt



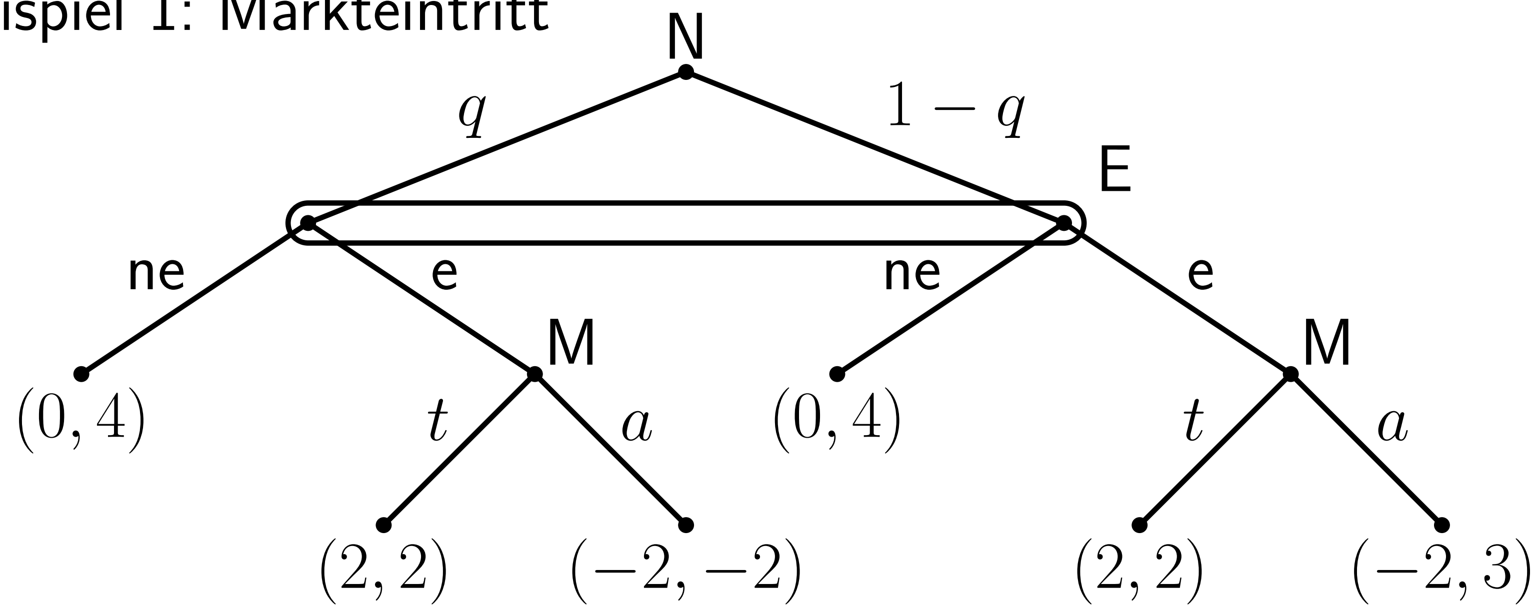
- Links: M ist “dünnhäutig” (D)
- Rechts: M ist “hartnäckig” (H)
- Falls E weiss nicht, ob M “D” oder “H” ist, verfügt E nur über ...
  - ... **unvollständige** Information

Unvollständige versus unvollkommene Information

- Unter unvollkommener Information kann ein Spieler nicht alle Züge seines Gegenspielers beobachten
  - Unsicherheit darüber, was der Gegenspieler macht
  - in Beispiel 1 herrscht also vollkommene Information
- Unter unvollständiger Information weiss ein Spieler nicht, ...

  ... von welchem "Typ" sein Gegenspieler ist
  - externe oder exogene Unsicherheit
- In Bsp 1: E wird Wkts-Beliefs über D und H formulieren
  - Sei $q =$ die Wkt, mit der M vom Typ D ist $\rightarrow$ dann ...

Beispiel 1: Markteintritt



- Wir modellieren die Unsicherheit von E über M als einen <u>Zufallszug</u>
  - E kann den Zug von N nicht beobachten, aber M kann
  - Also: M weiss, ob er vom Typ D oder H ist
- Damit: Spiel unter <u>unvollständiger</u> Info über Nutzenfunktion ...

  ... als Spiel unter <u>unvollkommener</u> Info (mit Zufallszug) dargestellt

Andere Arten unvollständiger Information

- Auf diese Weise können wir alle Spiele unter unvollständiger Info über Nutzenfunktion als Spiel unter unvollkommener Info (mit Zufallszug) darstellen

- Es gibt aber noch andere Arten von unvollständiger Information

  - Wie viele Gegenspieler? (eBay)

  - Welche Aktionen hat ein Gegenspieler?

  - Wie hängt der Spielausgang von den Aktionen ab?

Andere Arten unvollständiger Information und Harsanyi

- Harsanyi (1967) hat gezeigt:
- Man kann alle Arten unvollständiger Information ...

  ... als unvollständige Info über die Nutzenfunktion darstellen
- Damit kann man alle Spiele unter unvollständiger Information ...

  ... als Spiele unter unvollkommener Information darstellen

  (Harsanyi-Doktrin)
- (Dennoch gibt es einen Bedeutungsunterschied der beiden Spielklassen)

Der Ansatz von Harsanyi

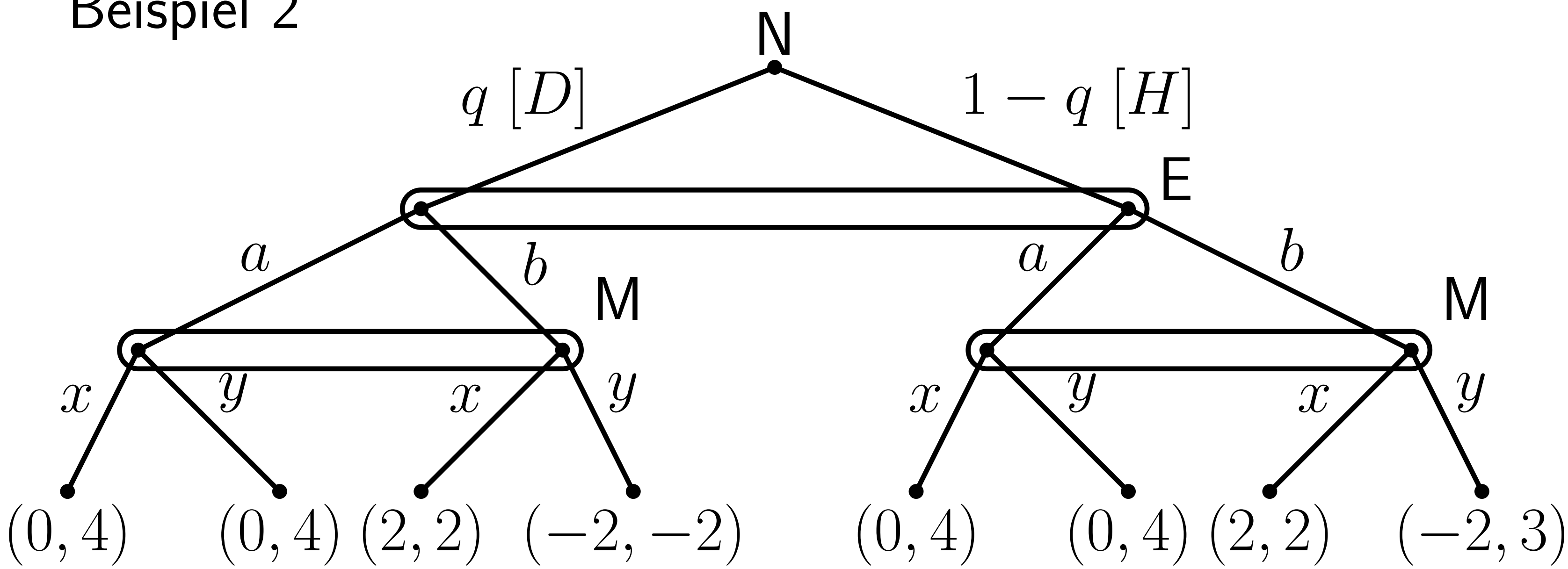
- Spiele unter unvollständiger Info vollziehen sich wie folgt:
- Am Anfang wählt Natur per Zufallszug einen Parameter t
  - ◇ t beeinflusst die Nutzenfunktion der Spieler
  - ◇ Die Wkt, mit der ein Zufallszug erfolgt, ist common knowledge
- Die Spieler können den Parameter t nur teilweise beobachten
  - ◇ t bildet also die externe Unsicherheit der Spieler ab
- Dieser Ansatz überführt Spiele unter unvollständiger ...

  ... in Spiele unter unvollkommener Information

Kap. 16: Statische Spiele unter unvollständiger Information

- Wir betrachten zunächst statische Spiele
- Dabei wählt Natur zuerst ein Typenprofil $t = (t_1, \ldots, t_n)$ gemäss einer Wkt-Verteilung $p(t)$
- Spieler i beobachtet seinen Typen t_i
- Dann ziehen alle Spieler simultan
  - d.h. jeder Spieler i wählt eine Aktion aus der Menge S_i
- Als Beispiel betrachten wir die statische Version des Markteintrittspiels
  - Für E gibt es nur einen (trivialen) Typen
  - Für M gibt es zwei Typen: $t_2 \in \{D, H\}$

Beispiel 2



- Aktionen: $S_E = \{a,\ b\}, \quad S_M = \{x, y\}$
- Strategien: E hat eine Info-Menge — so viele wie Typen
  - also zwei Strategien: a und b
- M hat zwei Info-Mengen — so viele wie Typen
  - also vier Strategien: $(x, x) \quad (x, y) \quad (y, x) \quad (y, y)$

Beschreibung statischer Spiele unter unvollst Info

Definiere allgemein: ein statisches Spiel unter unvollst. Info umfasst:

- n Spieler $i = 1, \ldots, n$
- Für jeden Spieler eine Aktionenmenge S_i
- Für jeden Spieler einen Typenraum T_i
  - ◇ $t_i \in T_i$ ist ein Typ von Spieler i
  - ◇ Sei $\quad T = T_i \times \ldots \times T_n \quad$ der gesamte Typenraum
  - ◇ Sei $\quad t = (t_1, \ldots, t_n) \in T \quad$ ein Typenprofil
- Für jeden Spieler eine Nutzenfunktion $u_i(s, t) \in \mathbb{R}$
- Eine Wkts-Verteilung p auf T
  - ◇ $p(t)$ ist die Wkt, dass N das Typenprofil t wählt

Beschreibung statischer Spiele unter unvollst Info

- Damit definieren wir die Normalform:

$$G = \{S_1,\ T_1,\ u_1(\cdot), \ldots,\ S_n,\ T_n,\ u_n(\cdot),\ p(\cdot)\}$$

- In Bsp 2 besteht G ...
  - ... aus zwei Bi-Matrizen
    - eine für Typ D und eine für Typ H
  - ... sowie der Wkts-Verteilung: $q=$ Wkt, dass Natur Typ D zieht

Zugfolge in statischen Spielen unter unvollst Info

- Das Spiel vollzieht sich wie folgt
  - Zuerst wählt Natur zufällig ein Typenprofil $t = (t_1, \ldots, t_n)$
  - Jeder Spieler i beobachtet seinen Typ t_i
    - Wir sagen: t_i ist private Information für Spieler i
  - Dann wählt jeder Spieler i eine Aktion aus seiner Aktionsmenge S_i
- Wir nennen ein statisches Spiel unter unvollst. Info

  Statisches Bayesianisches Spiel

Strategien in statischen Bayesianischen Spielen

- In einem statischen Bayesianischen Spiel entspricht ...

  ... jeder Typ t_i von Spieler i einer Info-Menge von Spieler i

- Also: Eine Strat. für i spezifiziert für jeden Typ t_i eine Aktion aus S_i

- Formal: Eine (reine) Strategie für Spieler i ist eine Funktion

$$\sigma_i : T_i \to S_i$$

- Entsprechend: gemischte Strategie

  – spezifiziert für jeden Typ t_i eine Wkt-Verteilung auf S_i

- In Bsp 2: $\sigma_E = (\alpha, \beta) \quad \sigma_M = (\ (\xi_D, \theta_D), (\xi_H, \theta_H)\ )$

Nutzenbestimmung in statischen Bayesianischen Spielen

- Was ist der Nutzen eines Spieler aus einer bestimmten Strategie?
- Wir unterscheiden zwei Perspektiven:
- 1. Vor dem Zug von Natur: Ex-ante Perspektive
  - Erwartungsnutzen in bezug auf die unbedingte (a priori) Wkt $p(\cdot)$
- 2. Nach dem Zug von Natur (aber vor dem Zug der Spieler): Ex-post Perspektive
  - Erwartungsnutzen in bezug auf die bedingte (a posteriori) Wkt $p(\cdot|t_i)$
- Werden sehen: beide Perspektiven eng verbunden

Ex-ante Perspektive in Bsp 2

- Nimm an, E spielt $\sigma_E = (\alpha, \beta)$
- Was ist der ex-ante Nutzen für M, wenn M mit ...

  ... $\sigma_M = (\ (\xi_D, \theta_D), (\xi_H, \theta_H)\ )$ auf σ_E antwortet?

$$\begin{aligned} U_M(\sigma_M, \sigma_E) \ &= \ q \cdot [\alpha\xi_D \cdot 4 + \alpha\theta_D \cdot 4 + \beta\xi_D \cdot 2 + \beta\theta_D \cdot (-2)] \\ &+ \ (1-q) \cdot [\alpha\xi_H \cdot 4 + \alpha\theta_H \cdot 4 + \beta\xi_H \cdot 2 + \beta\theta_H \cdot 3] \end{aligned}$$

- Analog:

$$\begin{aligned} U_E(\sigma_M, \sigma_E) \ &= \ q \cdot [\alpha\xi_D \cdot 0 + \alpha\theta_D \cdot 0 + \beta\xi_D \cdot 2 + \beta\theta_D \cdot (-2)] \\ &+ \ (1-q) \cdot [\alpha\xi_H \cdot 0 + \alpha\theta_H \cdot 0 + \beta\xi_H \cdot 2 + \beta\theta_H \cdot (-2)] \end{aligned}$$

Ex-post Perspektive in Bsp 2

- Nimm an, E spielt $\sigma_E = (\alpha, \beta)$
- Was ist der Nutzen für M, wenn er Typ D ist, und wenn M mit ...

  ... $\sigma_M = (\ (\xi_D, \theta_D), (\xi_H, \theta_H)\ )$ auf σ_E antwortet?

$$U_M(\sigma_M, \sigma_E \mid D) \;=\; \alpha\xi_D \cdot 4 + \alpha\theta_D \cdot 4 + \beta\xi_D \cdot 2 + \beta\theta_D \cdot (-2)$$

- Analog, wenn er Typ H ist:

$$U_M(\sigma_M, \sigma_E \mid H) \;=\; \alpha\xi_H \cdot 4 + \alpha\theta_H \cdot 4 + \beta\xi_H \cdot 2 + \beta\theta_H \cdot 3$$

- Für E ist in Bsp 5 die ex-ante und ex-post Perspektive gleich

  (da nur ein Typ)

Ex-ante Perspektive allgemein

- Betrachte ein Strategienprofil $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ ...

  - ... und ein Aktionenprofil $s = (s_1, \ldots, s_n)$

- Sei $\sigma_i(t_i)(s_i)$ die Wkt, mit der i die Aktion s_i spielt, wenn er t_i ist

- Dann ist

$$\pi^\sigma(s|t) = \sigma_1(t_1)(s_1) \cdot \ldots \cdot \sigma_n(t_n)(s_n)$$

  die Wkt, mit der s gespielt wird, wenn N das Typenprofil $t = (t_1, \ldots, t_n)$ gezogen hat

- In diesem Fall erzielt Spieler i den Bernoulli-Nutzen: $u_i(s, t)$

- Also ist sein ex-ante Erwartungsnutzen

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{t \in T} u_i(s, t) \cdot \pi^\sigma(s|t) \cdot p(t)$$

Ex-post Perspektive allgemein

- Betrachte nun Spieler i, <u>nachdem</u> er seinen Typ t_i beobachtet hat

- Dann aktualisiert er seinen Wkts-Belief über die Typen der Gegenspieler via Bayes' rule

- Für ein bestimmtes Typenprofil t_{-i} der Gegenspieler ist

$$p(t_{-i} \mid t_i) = \frac{p(\ (t_i, t_{-i})\ )}{p_i(t_i)}$$

  die bedingte Wkt, dass N das Gegenspielertypenprofil t_{-i} gezogen hat,

  ... <u>bedingt</u> darauf, dass N den Typen t_i von SPi gezogen hat

  – Dabei bezeichnet $p_i(\cdot)$ die Randverteilung von t_i

- Nun berechnet SPi seinen E-nutzen mit der bedingten Wkt $p(\cdot|t_i)$

Ex-post Perspektive allgemein

- D.h. der ex-post Erwartungsnutzen von Spieler i ist:

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}|t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} u_i(s,t) \cdot \pi^{\sigma}(s|t) \cdot p(t_{-i}|t_i)$$

- Beachte: Summation geht nun über t_{-i}
  - denn Spieler i kennt ja seinen Typ t_i
- <u>Wir</u> nehmen immer an, dass die Typen stochastisch unabhängig sind
  - dann: $p(t_{-i} \mid t_i) = p_1(t_1) \cdot \ldots \cdot p_{i-1}(t_{i-1}) \cdot p_{i+1}(t_{i+1}) \cdot \ldots \cdot p_n(t_n)$

Verbindung zwischen ex-ante und ex-post Perspektive

Behauptung: Der ex-ante Erwartungsnutzen ist der Erwartungswert des ex-post Erwartungsnutzens, d.h.

$$U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{t_i} U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}|t_i) \cdot p_i(t_i)$$

"Beweis": Einfach Formel für bedingte Wahrscheinlichkeit einsetzen

Intuitive Interpretation:

– Mit ex-ante Wkt $p_i(t_i)$ ist Spieler i vom Typ t_i

– In diesem Fall erzielt er den ex-post Nutzen $U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}|t_i)$

– Also: Ex-ante Nutzen ist Mittel über alle möglichen ex-post Nutzen

Lösungskonzepte für statische Bayesianische Spiele

- Was ist nun ein Gleichgewicht in einem stat. Bayesianischen Spiel?
- Idee:
  - Spieler beobachten zuerst ihren Typ ...
  - ... und wählen dann eine sequentiell rationale Strategie
  - Wir verlangen sequentielle Rationalität für alle möglichen Typen
    - wie bei PBG
- Ein solches GG nennt man <u>Bayesianisches Nash-Gleichtgewicht</u>

Bayesianisches Nash-Gleichgewicht

Definition: Ein Bayesianisches Nash-Gleichgewicht ist ein Strategienprofil $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$, so dass für jeden Spieler i und jeden Typ t_i gilt:

$$U_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^* \mid t_i) \geq U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^* \mid t_i) \text{ für alle } \sigma_i$$

- Im GG spielt jeder Spieler eine (<u>ex-post</u>) beste Antwort gegen die Strategie des Gegenspielers

Bsp 2 Die folgenden Strategien sind ein Bayes N-GG

– E: spiele a wenn $q \leq 1/2$

– M: spiele x, wenn Typ D; spiele y, wenn Typ H

Verifikation

- Betrachte E: Gegeben die Strategie von M:
  – a liefert $q \cdot 0 + (1-q) \cdot 0$; b liefert $q \cdot 2 + (1-q) \cdot (-2)$
  – Damit: a optimal, wenn $q \leq 1/2$
- Betrachte M: Nimm an, E spielt a mit beliebiger Wkt α
  – Falls M Typ D: x liefert $\alpha \cdot 4 + (1-\alpha) \cdot 2$; y liefert $\alpha \cdot 4 + (1-\alpha) \cdot (-2)$
  – Falls M Typ H: x liefert $\alpha \cdot 4 + (1-\alpha) \cdot 2$; y liefert $\alpha \cdot 4 + (1-\alpha) \cdot 3$
  – Damit: x optimal, wenn Typ D; y optimal, wenn Typ H

Beispiel 3: Gefangenendilemma mit Reziprozität

- Wir betrachten ein GD, in dem die Präferenzen der Spieler ...

  ... nicht auf Geld beschränkt sind

- Vielmehr hängt der Nutzen eines Spielers von seinem eigenen Typ ...

  ... und vom Typ des Gegenspielers ab

  ◇ Man sagt: die Präferenzen sind interdependent

- Es gibt zwei Typen von Spielern

  ◇ $t_i = R$: "reziprok" (Wkt q), und $t_i = E$: "egoistisch"

- Der Nutzen für den reziproken Typ steigt, wenn der ...

  ... andere Spieler auch reziprok ist; aber fällt, wenn dieser egoistisch ist

Beispiel 3: Gefangenendilemma mit Reziprozität

- Die <u>monetären</u> Auszahlungen $m_i(s_1, s_2)$ sind durch das GD gegeben

(m_1, m_2)	C	D
C	$2, 2$	$0, 3$
D	$3, 0$	$1, 1$

- Gesamtnutzen von Spieler 1:
  - ◇ $u_1(s_1, s_2 \mid E, t_2) = m_1(s_1, s_2) \quad \forall t_2$
  - ◇ $u_1(s_1, s_2 \mid R, R) = m_1(s_1, s_2) + \alpha \cdot m_2(s_1, s_2)$
  - ◇ $u_1(s_1, s_2 \mid R, E) = m_1(s_1, s_2) - \beta \cdot m_2(s_1, s_2)$
  - ◇ α, β sind positive Parameter
- Symmetrisch für Spieler 2

Beispiel 3: Gefangenendilemma mit Reziprozität

Behauptung: Falls $q \geq (1+2\beta)/(2\alpha+2\beta)$, dann sind die folgenden Strategien ein Bayesianisches N-GG:

- $\diamond$ $t_i = E:$ spiele D
- $\diamond$ $t_i = R:$ spiele C

<u>Verifikation</u>

- Betrachte Typ $t_i = E$
  - D ist dominante Strategie
- also D in der Tat optimal für Typ $t_i = R$

<u>Verifikation</u>: Betrachte nun Typ $t_i = R$

- Gemäss der Strategie im Kandidaten–GG spielt Gegenspieler ...

  ... C, wenn $t_{-i} = R$ (Wkt q)

  ... D, wenn $t_{-i} = E$ (Wkt $1 - q$)

- Also:

  ◇ C liefert: $\quad q(2 + \alpha \cdot 2) + (1 - q)(0 - \beta \cdot 3)$

  ◇ D liefert: $\quad q(3 + \alpha \cdot 0) + (1 - q)(1 - \beta \cdot 1)$

- Also: C optimal, wenn ... $q \geq (1 + 2\beta)/(2\alpha + 2\beta)$ $\qquad \checkmark$

- Falls $q \leq (1 + 2\beta)/(2\alpha + 2\beta)$, dann anderes GG:

  ◇ spiele stets D unabhängig von Typ

Stetige Typenverteilungen

- Oft ist es analytisch einfacher, wenn der Typenraum <u>stetig</u> ist

  - z.B. $T_i = [0, 1]$

- Konzeptuell ändert sich dadurch nichts

  ◇ p wird eine Verteilungsfunktion bzw. Dichte

  ◇ und man muss Summen durch Integrale ersetzen

- Durch den Übergang von diskreten zu stetigen Typen wird man häufig gemischte Strategien los und kann GG via BeO ausrechnen

Anwendung: Erstpreisauktion mit zwei Bietern

- Spieler: Zwei Bieter, B1, B2, (ein Auktionator)

  - Bieter bieten für ein Objekt

- Typen:

  – Der Typ t_i von Bi ist seine Bewertung des Objekts (Z-bertschft)

  – Sei t_i gleichverteilt auf $[0, 1]$

  – Die Typen t_1 und t_2 sind stochastisch unabhängig

- Aktionen: jeder Bieter gibt ein Gebot $s_i \in [0, 1]$ ab
- Regeln: Objekt geht an das höchste Gebot (Münzwurf falls $s_1 = s_2$)

  – Gewinner zahlt sein Gebot (Erstpreisauktion)

Anwendung: Erstpreisauktion mit zwei Bietern

- Bernoulli-Nutzen von B1 aus Aktion (s_1, s_2) und Typ (t_1, t_2)

$$u_1(s_1, s_2, t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 - s_1 & \text{falls } s_1 > s_2 \\ .5(t_1 - s_1) & \text{falls } s_1 = s_2 \\ 0 & \text{falls } s_1 < s_2 \end{cases}$$

  – Beachte: hängt nur vom <u>eigenen</u> Typen ab (“private value”)

- Strategie

  – für jeden Typ t_i ein Gebot $s_i \in [0, 1]$

  – Also reine Strategie: $\sigma_i : [0, 1] \to [0, 1]$

Satz: Ein Bayesianisches Nash-GG der Erstpreisauktion mit zwei Bietern ist gegeben durch die Bietstrategien $\sigma_i^*(t_i) = (1/2) \cdot t_i$

Beweis:

- Wir müssen zeigen: Gegeben σ_2^*, ist es eine BA für B1, ...

  -... das Gebot $s_1 = (1/2) \cdot t_1$ abzugeben, <u>wenn</u> er Typ t_1 ist

- Berechne ex-post Erw-Nutzen aus einem beliebigen Gebot s_1 gegen σ_2^*

- Gibt B1 das Gebot s_1 ab, gibt es drei mögliche Auktionsausgänge

  1. $(1/2) \cdot t_2 < s_1 \quad \rightarrow$ B1 gewinnt und erzielt $t_1 - s_1$
  2. $(1/2) \cdot t_2 = s_1 \quad \rightarrow$ Münzwurf und B1 erzielt $.5(t_1 - s_1)$
  3. $(1/2) \cdot t_2 > s_1 \quad \rightarrow$ B1 verliert und erzielt 0

Beweis:

- Die drei Fälle ereignen sich mit den W-keiten:
  - Fall 1 hat Wkt $2s_1$ (da t_2 gleichverteilt)
  - Fall 2 hat Wkt 0 (da t_2 stetig verteilt)
  - Fall 3 hat Wkt $1 - 2s_1$ (da t_2 gleichverteilt)
- Damit ergibt sich der ex-post Erw-Nutzen von B1:

$$U_1(s_1, \sigma_2^* | t_1) = (t_1 - s_1) \cdot 2s_1 + (.5(t_1 - s_1)) \cdot 0 + 0 \cdot (1 - 2s_1)$$

- Ausklammern: $U_1(s_1, \sigma_2^* | t_1) = 2s_1 t_1 - 2s_1^2$
- Optimales Angebot s_1^* ergibt sich nun via BeO: $\partial U_1 / \partial s_1 = 0$
- Also $s_1^* = (1/2) \cdot t_1$ (damit alles gezeigt)

Bemerkung:

- Gebote liegen unterhalb der wahren Bewertung des Gutes

  $\rightarrow$ Bieter erzielen einen positiven Nutzen (ex-ante und ex-post)

- Man sagt: Bieter erzielen <u>Informationsrente</u>

- Beachte: Wenn der Auktionator t kennen würde ...

  ... könnte er die gesamte Zahlungsbereitschaft abschöpfen

  (wie bei Bertrand oder bei Ultimatum-Verhandlungen)

- Man kann zeigen: Wenn die Zahl der Bieter steigt ...

  ... dann konvergieren die Gebote gegen die wahre Bewertung

  – Also: Wettbewerb reduziert Informationsrenten