KAP 18. Dynamische Spiele unter unvollständiger Information

- Betrachten nun folgende Situation:
  - wie in statischen Bayesianischen Spielen ....

    ... wählt zunächst Natur die Typen der Spieler
  - doch dann ziehen die Spieler sequentiell
- Ein solches Spiel heisst

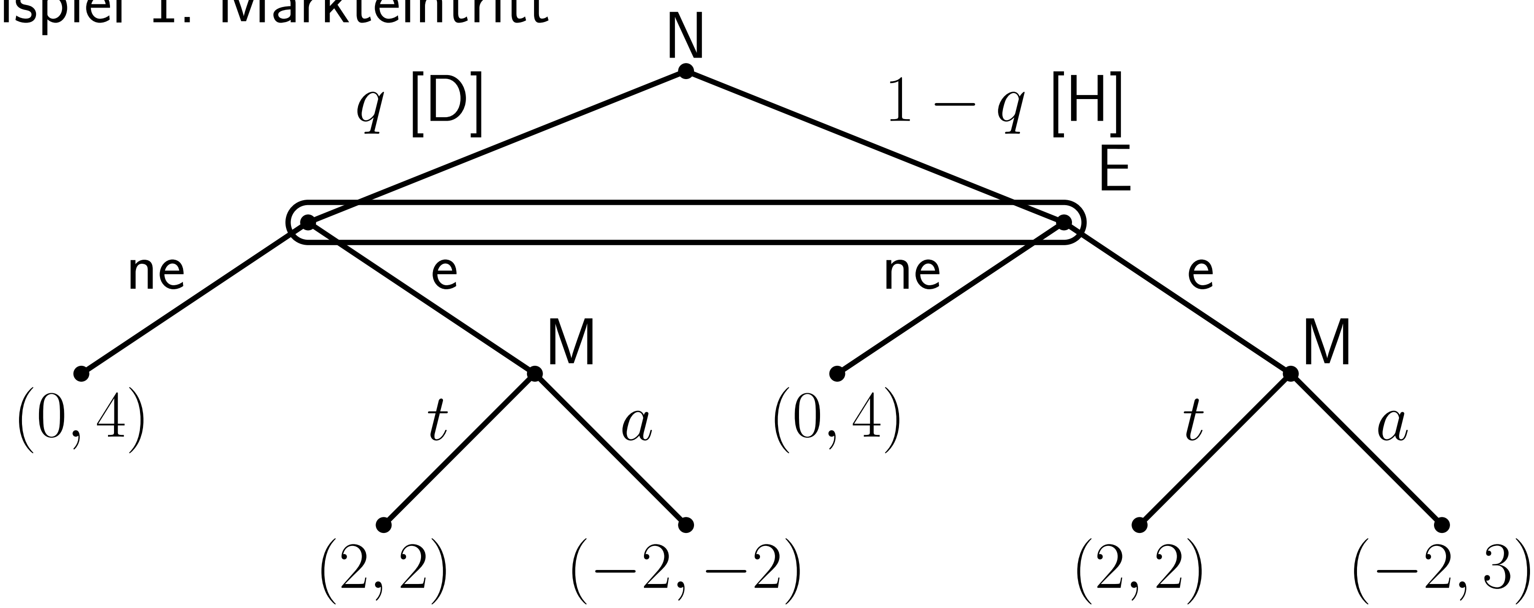
Dynamisches Spiel unter unvollständiger Information

Dynamische Spiele unter unvollständiger Information

- Beschreibung von Dynamischen Spielen unter unvollst. Info:
  - extensives Spiel mit Zufallszug
- Lösungskonzept: PBG
  - doch nun: beim Aktualisieren der Beliefs auch noch ...

  ... Wkten berücksichtigen, mit denen Natur zieht

Beispiel 1: Markteintritt



- Beachte: M entscheidet unter vollkommener Information:
  - Also optimale Strategie: $\sigma^*_M(D) = t, \quad \sigma^*_M(H) = a$
- Betrachte E
  - Wkt, dass er sich links befindet: q
  - Also: e liefert $q \cdot 2 + (1-q) \cdot (-2)$; $\qquad ne$ liefert 0
  - Damit: Optimale Strategie: $\sigma^*_E = e \iff q \geq 1/2$

Bemerkung

- Beispiel 1 ist aus zwei Gründen sehr einfach und speziell

  (a) E zieht vor M

  (b) E hat keine private Information

- Wegen (a): die Entscheidung von M beeinflusst nicht...

  ... wo sich E im Spielbaum befindet

  $\rightarrow$ E muss beim Updaten seiner Beliefs nur die Wkt q berücksichtigen

  – ... aber nicht die Strategie von M

- Wegen (b): M wählt unter vollkommener Information

Signalisierungs-Spiele

- Wir betrachten nun Spiele, in denen ...
  - ... ein Spieler mit privater Information <u>zuerst</u> zieht ...
  - ... und die nachfolgenden Spieler dessen Aktionen beobachten können
- Solche Spiele nennt man **Signalisierungs**-Spiele

Signalisierungs-Spiele

- In Signalisierungs-Spielen offenbart der Zug ...

  ... des zuerst ziehenden Spielers Information über seinen Typ

  ... (denn wie er zieht, hängt ja von seinem Typ ab)

- Die nachfolgenden SP werden ihre Beliefs aktualisieren ...

  ... und ihr Verhalten entsprechend anpassen

- Der zuerst ziehende Spieler antizipiert aber den ...

  ... Informationsseffekt seines Zuges auf die anderen Spieler ...

  ... und wird diesen in sein strategisches Kalkül mit einbeziehen

Bsp 2: Ausbildung als Intelligenz-Signal

- Spieler und Typen
  - ein Arbeiter, SP1, ein Arbeitgeber, SP2
  - SP1 kann entweder intelligent sein oder nicht: $t_1 \in \{H, L\}$
  - Mit Wkt p_t ist er vom Typ t [SP2 hat keine priv Info]
- Spielregeln
  - Natur zieht den Typ von SP1
  - SP1 beobachtet seinen Typ, aber nicht SP2
  - SP1 entscheidet, ob er an die Uni geht oder nicht: $a_1 \in \{u, nu\}$
  - SP2 beobachtet die Wahl von SP1 und entscheidet ...

  ... ob er SP1 einstellt oder nicht $a_2 \in \{j, n\}$

Bsp 2: Ausbildung als Intelligenz-Signal

- Nutzen
  - An die Uni zu gehen, hat Kosten c_t für SP1 (Zeit, Büffeln ...)
    - ◇ Da H-Typ intelligenter, gilt: $c_H < c_L$!!
  - Wird SP1 eingestellt:
    - ◇ SP1 erhält Lohn $w > 0$
    - ◇ SP2 erzielt Gewinn $v_t - w$ [unabhg. von u oder nu!]
    - ◇ Da H-Typ intelligenter, gilt: $v_H > v_L$!!
  - Wird SP1 nicht eingestellt, ...
    - ◇ ... so erhält SP1 den Lohn 0, und SP2 erzielt den Gewinn 0
- Annahme: **A1:** $v_L - w < 0 < v_H - w$, **A2:** $w - c_L < 0 < w - c_H$

Behauptung: Die folgenden Strategien und Beliefs bilden ein PBG des Ausbildungsspiels:

- SP1: Gehe an die Uni, wenn Typ H: $\sigma_1^*(H) = u$
  - Gehe nicht an die Uni, wenn Typ L: $\sigma_1^*(L) = nu$
- SP2: Wenn SP1 an der Uni war, stelle ihn ein $\sigma_2^*(u) = j$
  - Wenn SP1 nicht an der Uni war, stelle ihn nicht ein $\sigma_2^*(nu) = n$
- Beliefs von SP2
  - Wenn SP1 an der Uni war: $\mu_H^u = 1, \quad \mu_L^u = 0$
  - Wenn SP1 nicht an der Uni war: $\mu_H^{nu} = 0, \quad \mu_L^{nu} = 1$

Verifikation: Verhält sich SP1 rational, gegeben σ_2^*

- Typ H
  - $\diamond$ u liefert $w - c_H$, nu liefert 0
  - $\diamond$ A2 $\Rightarrow$ $\sigma_1^*(H) = u$ optimal
- Typ L
  - $\diamond$ u liefert $w - c_L$, nu liefert 0
  - $\diamond$ A2 $\Rightarrow$ $\sigma_1^*(L) = nu$ optimal

Verifikation: Verhält sich SP2 sequentiell rational?

- Sei μ wie in der Behauptung gegeben

- Beobachtet SP2 Aktion u, dann glaubt er, dass SP1 vom Typ H ist

$\rightarrow \quad j$ liefert $v_H - w,$ $\qquad n$ liefert 0

– A1 $\Rightarrow \quad \sigma_2^*(u) = j$ ist optimal

- Beobachtet SP2 Aktion nu, dann glaubt er, dass SP1 vom Typ L ist

$\rightarrow \quad j$ liefert $v_L - w,$ $\qquad n$ liefert 0

- A1 $\Rightarrow \quad \sigma_2^*(nu) = n$ ist optimal

Verifikation: Sind die Beliefs von SP2 Bayesianisch konsistent?

- Sei σ_1^* gegeben
- Betrachte Info-Menge, nachdem SP1 u gespielt hat
  - Die <u>bedingte</u> Wkt, dass SP1 vom Typ H ...

  ... gegeben diese Info-Menge wird erreicht, ist:

$$\mu_H^u = \frac{p_H \cdot Pr[\text{ H spielt u }]}{p_H \cdot Pr[\text{ H spielt u }] + p_L \cdot Pr[\text{ L spielt u }]}$$

  - Unter σ_1^* gilt: $Pr[\text{ L spielt u }] = 0$ Also: $\mu_H^u = 1$
- Für Info-Menge, nachdem SP2 nu gespielt hat: analog
- Damit alles gezeigt

Bemerkung

- Das soeben hergeleitete GG heisst **separierendes** GG
- In einem separierenden GG ...

  ... spielen verschiedene Typen verschiedene Aktionen
- Der nachfolgende Spieler kann also den Typ <u>eindeutig identifizieren</u>
  - Man sagt: Die Typen <u>offenbaren</u> bzw. <u>enthüllen</u> sich
- Um die Logik hinter einem separierenden GG zu verstehen, machen wir das folgende Gedankenexperiment

Gedankenexperiment:

- Nimm an, es gäbe keine Universität
- SP2 muss direkt entscheiden, ob er einstellt oder nicht
  - ◇ j liefert $p_H \cdot (v_H - w) + p_L \cdot (v_L - w)$, n liefert 0
  - ◇ Also: "Nicht einstellen" optimal wenn p_L relativ gross
- Nimm an, das ist der Fall
- Der H-Typ würde gerne eingestellt werden und könnte "argumentieren"
  - "ich bin ein H-Typ; wenn Du mich einstellst, machst Du Gewinn"
- Das Problem ist: Der L-Typ würde auch gerne eingestellt werden ...

  ... und könnte das gleiche behaupten

Gedankenexperiment

- SP1 wird entgegnen: “jeder kann behaupten, dass er ein H-Typ ist
  - ich will Beweise sehen! und zwar so:
- Um mir zu beweisen, dass du ein H-Typ bist, musst du ...
  - ... eine Aktion wählen, die nur für den H-Typ profitabel ist ...
  - ... aber unprofitabel für den L-Typ
- In unserem Bsp ist dies die Aktion u
- MaW: Wahl u signalisiert <u>glaubwürdig</u>, dass SP1 ein H-Typ ist
  - denn wäre er ein L-Typ, dann wäre ihm u zu teuer

Anreizverträglichkeit

- Die Aktion u erfüllt also folgende Bedingung
  - Gegeben, Einstellen folgt auf u, dann

  (a) Der H-Typ hat einen Anreiz, u zu wählen

  (b) Der L-Typ hat keinen Anreiz, u zu wählen
- Diese Bedingung nennt man **Anreizverträglichkeitsbedingung** für ein separierendes GG
- Ann A2 gewährleistet Anreizverträglichkeit
  - Ist A2 verletzt, gibt es kein separierendes GG (siehe unten)

Pooling GG in Bsp 2

- A2 ist aber nur eine notwendige ...
  - ... keine hinreichende Bedingung für ein sep. GG
- In der Tat: es gibt ein PBG in Bsp 2, in dem beide Typen nu wählen:
  - $\sigma_1^*(H) = nu, \quad \sigma_1^*(L) = nu$
  - Falls p_L groß, dann $\quad \sigma_2^*(u) = \sigma_2^*(nu) = n$
  - Falls p_L klein, dann $\quad \sigma_2^*(u) = \sigma_2^*(nu) = j$
  - Beliefs: $\mu_H = p_H, \quad \mu_L = p_L$ für beide Info-Mengen
- Selber verifizieren
- Ein GG, in dem alle Typen dieselbe Aktion wählen heisst **Pooling**-GG

Pooling GG in Bsp 2

- In Bsp 2 ist das Pooling GG nicht unbedingt plausibel ...
  - (aus Gründen, die wir nicht behandeln)
  - ... aber immerhin eine theoretische Möglichkeit
- Wir hatten gesagt: A2 ist eine notwendige Bedingung für ein separierendes GG
- Um das deutlicher zu machen, betrachten wir Bsp 2, wenn A2 verletzt ist

Bsp 2, wenn A2 verletzt ist

- Nimm nun an, dass gilt: $w - c_H > 0$ <u>und</u> $w - c_L > 0$

- Beh: Dann wählen in jedem PBG beide Typen dieselbe Aktion

  - d.h. es gibt nur ein Pooling-GG

- Bew: Nimm an, es gibt ein GG mit $\sigma_1(H) = u$ und $\sigma_1(L) = nu$

- Wegen Bayesianischer Konsistenz muss dann SP2 glauben, dass ...

  ... SP1 ein H-Typ ist, wenn er u beobachtet (und also SP1 einstellen)

  ... SP1 ein L-Typ ist, wenn er nu beobachtet (und SP1 nicht einstellen)

- Dann hätte aber der L-Typ einen Anreiz abzuweichen:

  – denn u liefert $w - c_L > 0,\ ;$ nu liefert 0 (Wid-spr. zu $\sigma_1(L) = nu$)

Bsp 2, wenn A2 verletzt ist

- Gleiches Argument: es gibt kein GG mit $\sigma_1(H) = nu,$ und $\sigma_1(L) = u$
- Das Beispiel illustriert:
  - Wenn c_L klein ist ...
  - ... dann wird der L-Typ den H-Typ imitieren
  - ... und es kann zu keiner Separierung der Typen kommen
- Allgemeiner gesprochen gilt

  \- Wenn die "Aussendung" des Signals relativ billig ist

  \- ... kann es zu keiner Separierung der Typen kommen

  \- ... weil ein Signal nicht glaubwürdig ist und nichts "bedeutet"

Bemerkung

- Man kann Bsp 2 erweitern und den Lohn w endogenisieren
  - d.h. der Lohn wird auf einem kompetitiven Arbeitsmarkt gebildet
- Das resultierende Modell ist das Spence-Modell
  - (die zugrunde liegende Logik bleibt gleich)
- Signalisierungs-Phänomene kann man ständig beobachten
- Konsum von Luxusgütern signalisiert Reichtum ...
  - ... und resultiert in hohem Status
- Damit es zu Separierung kommt ...
  - müssen Luxusgüter also teuer sein (sonst A2 verletzt)

Signalisierungs-Phänomene

- Moden und Trends
  - wie kommt es zu konformem Verhalten?
  - konformes Verhalten in Gruppen kann als Pooling–GG erklärt werden
- Werbung
- Biologie: Phänotyp als Signal für Genotyp (Pfauenfedern)
- Selbsttäuschung