KAP 1. Bi–Matrix Spiele

Wir betrachten eine Situation mit zwei Spielern, die

- ihre Aktionen (Strategien) simultan und unabhängig wählen
- die möglichen Strategien und Nutzen ihrer Gegensp. vollständig kennen

  -vollständige Information
- Bemerkung:

  – "simultan" nicht wörtlich gemeint, sondern: ein Spieler kennt die gewählten Aktionen seiner Gegenspieler nicht, wenn er am Zug ist

  – "unabhängig": Spieler können keine bindenden Vereinbarungen treffen

Bi–Matrix Spiele

- Wir repräsentieren die strategische Situation durch eine **Bi–Matrix**

Spieler 2

	x	y	z
Spieler 1 a	2,0	4,5	3,9
b	8,3	1,1	0,–2

- SP1 hat drei Strategien $\{x, y, z\}$
  – SP2 hat zwei Strategien: $\{a, b\}$
- Der Nutzen von SPi aus einem Strategienpaar ist ...

  ... die i–te Komponente des Eintrags in der entsprechenden Zelle

Das Gefangenen-Dilemma

	Gestehen	Schweigen
Gestehen	$-5,\ -5$	$0,\ -10$
Schweigen	$-10,\ 0$	$-1,\ -1$

- Zwei Gefangene sitzen wegen eines gemeinsamen großen Verbrechens ein.
- Der Staatsanwalt kann nur ein kleines Vergehen nachweisen ...

  ... und bietet jedem eine Kronzeugenregelung an:

– Gestehen beide das große Verbrechen, kriegen beide je 5 Jahre

– Schweigen beide, kriegen sie wegen des kleinen Vergehens je 1 Jahr

– Gesteht genau einer, kommt der Geständige frei, ...

... der andere kriegt 10 Jahre

Battle of the Sexes

		Anna	
		Theater	Kino
Otto	Theater	1,2	0,0
	Kino	0,0	2,1

- Anna und Otto haben sich verabredet, aber vergessen wo
- Otto mag lieber Kino als Theater ...
  - ... aber Otto geht lieber mit Anna ins Theater als alleine zu sein
- Anna mag Theater lieber als Kino ...
  - ... aber auch sie geht lieber mit Otto ins Kino als alleine zu sein.

Matching Pennies

	Kopf	Zahl
Kopf	$-1, +1$	$+1, -1$
Zahl	$+1, -1$	$-1, +1$

- Jeder Spieler legt gleichzeitig eine 1-Euro Münze auf den Tisch.
  - Zeigen beide Münzen die gleiche Seite, erhält SP2 den Euro von SP1.
  - Ansonsten erhält Spieler 1 den Euro von Spieler 2.

Bi–Matrix Spiele—allgemeine Definition

Ein Bi–Matrix Spiel G besteht aus den folgenden 3 Elementen:

- zwei Spielern $i = 1, 2$

- den Stragiemengen

  ◇ $S_1 = \{a_1, \dots, a_k, \dots, a_K\}$ für Spieler 1

  ◇ $S_2 = \{x_1, \dots, x_m, \dots, x_M\}$ für Spieler 2

- einer Nutzenmatrix für jeden Spieler i, gegeben durch

  ◇ $u_i(a_k, x_m), \qquad k = 1, \dots, K,\ m = 1, \dots, M$

  ◇ $u_i(a_k, x_m)$ ist der Nutzen für SPi, wenn SP1 a_k und SP2 x_m spielt

Illustration: $K = 3,\ M = 2$

- $S_1 = \{a, b, c\}, \quad S_2 = \{x, y\}$:

Spieler 2

Spieler 1

	x	y
a	$u_1(a,x)\ ,\ \ u_2(a,x)$	$u_1(a,y)\ ,\ \ u_2(a,y)$
b	$u_1(b,x)\ ,\ \ u_2(b,x)$	$u_1(b,y)\ ,\ \ u_2(b,y)$
c	$u_1(c,x)\ ,\ \ u_2(c,x)$	$u_1(c,y)\ ,\ \ u_2(c,y)$

- Später werden wir eine beliebige Anzahl von Spielern zulassen
  - Matrix–Darstellung dann nicht mehr möglich

KAP 2. Dominanz

- Wir kommen zum ersten Lösungskonzept
- Dabei betrachten wird die folgende Situation:
  - Rationale Spieler spielen ein Spiel
  - Die Spieler wissen, mit welchen Gegenspielern sie es zu tun haben
  - Die Spieler überlegen, was die Gegenspieler tun oder nicht tun
- Das sind die gleichen Annahmen, ...

  ... die man in der nicht–interaktiven Entscheidungstheorie macht

Dominanz

- Fragestellung: Wie spielen rationale Akteure ein Spiel?
- Was lässt sich unter der Rationalitätsannahme über den Spielausgang sagen?
  - Lässt sich der Spielausgang exakt vorhersagen?
  - ... oder zumindest eingrenzen?
  - Wenn er sich vorhersagen lässt, welche Eigenschaften hat er?
    - z.B. komparative Statik Eigenschaften

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

- Betrachte SP1, und nimm an, SP1 überlegt, c zu spielen
  - dazu macht er eine Prognose über das Verhalten von SP2 ...
  - und vergleicht die Nutzen von c mit a und b
- Er stellt fest: Was auch immer SP2 spielt,

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	1, 1	12, 2
c	-1, 5	0, -2

- Betrachte SP1, und nimm an, SP1 überlegt, c zu spielen
  - dazu macht er eine Prognose über das Verhalten von SP2 ...
  - und vergleicht die Nutzen von c mit a und b
- Er stellt fest: Was auch immer SP2 spielt, c ist immer schlechter als b
- Wir würden also erwarten, dass SP1 keinesfalls c spielt

Strikt dominierte Strategien

Eine Strategie mit der Eigenschaft von c heisst strikt dominiert

Definition Betrachte ein Bi–Matrix Spiel. Eine Strategie a_k heisst strikt dominiert für SP1, wenn er eine andere Strategie a_ℓ hat, so dass

$$u_1(a_k, x_m) < u_1(a_\ell, x_m) \qquad \text{für } \textbf{alle} \text{ Strategien } x_m \text{ von SP2}$$

Für SP2 ist die Definition analog.

Bemerkung: Rationale Spieler spielen niemals strikt dominierte Strategien!

Implikation: Dadurch können wir bestimmte Spielausgänge ausschliessen

– Oben: (c, x) und (c, y)

Nächstes Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

- Betrachte nun SP2. Nimm an:
    - SP2 WEISS, dass SP1 rational ist
    - Dann schliesst SP2: "SP1 spielt niemals die dominierte Strategie c"

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
[redacted]	[redacted]	[redacted]

- Betrachte nun SP2. Nimm an:
  - SP2 WEISS, dass SP1 rational ist
  - Dann schliesst SP2: "SP1 spielt niemals die dominierte Strategie c"
- Also: Wenn SP2 rational ist, dann sollte er niemals x spielen, denn

Gedankenexperiment

	x	y
a	5, 3	5, 6
b	1, 1	12, 2
[redacted]	[redacted]	[redacted]

- Betrachte nun SP2. Nimm an:
  - SP2 WEISS, dass SP1 rational ist
  - Dann schliesst SP2: "SP1 spielt niemals die dominierte Strategie c"
- Also: Wenn SP2 rational ist, dann sollte er niemals x spielen, denn

  ... im reduzierten Spiel, ist x strikt dominiert durch y

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

Betrachte nun wieder SP1. Nimm an:

- SP1 WEISS, dass SP2 rational ist

- SP1 WEISS, dass SP2 weiss, dass SP1 rational ist

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

Dann schliesst SP1 wie folgt:

- "SP2 weiss, dass ich rational bin"
- "Also weiss SP2, dass ich niemals c spiele"

Gedankenexperiment

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
[redacted]	[redacted]	[redacted]

Dann schliesst SP1 wie folgt:

- "SP2 weiss, dass ich rational bin"
- "Also weiss SP2, dass ich niemals c spiele"
- "Also spielt SP2 niemals x (denn SP2 ist ja rational)"

Gedankenexperiment

	[redacted]	y
a	[redacted]	$5, 6$
b	[redacted]	$12, 2$
[redacted]	[redacted]	[redacted]

Dann schliesst SP1 wie folgt:

- "SP2 weiss, dass ich rational bin"
- "Also weiss SP2, dass ich niemals c spiele"
- "Also spielt SP2 niemals x (denn SP2 ist ja rational)"
- "Also spielt SP2 y und somit ist b für mich optimal"

Gedankenexperiment

	[redacted]	y
a	[redacted]	$5, 6$
b	[redacted]	$12, 2$
[redacted]	[redacted]	[redacted]

Dann schliesst SP1 wie folgt:

- "SP2 weiss, dass ich rational bin"
- "Also weiss SP2, dass ich niemals c spiele"
- "Also spielt SP2 niemals x (denn SP2 ist ja rational)"
- "Also spielt SP2 y und somit ist b für mich optimal"

Gedankenexperiment

	[redacted]	y
[redacted]	[redacted]	[redacted]
b	[redacted]	$12, 2$
[redacted]	[redacted]	[redacted]

Dann schliesst SP1 wie folgt:

- "SP2 weiss, dass ich rational bin"
- "Also weiss SP2, dass ich niemals c spiele"
- "Also spielt SP2 niemals x (denn SP2 ist ja rational)"
- "Also spielt SP2 y und somit ist b für mich optimal"

Wir würden also den Ausgang (b, y) erwarten

Dieses Verfahren heisst

Wiederholte Eliminierung strikt dominierter Strategien

- Das Verfahren reduziert die Menge an möglichen Spielausgängen, die rationale Spieler wählen
- Das Verfahren basiert auf der Annahme, dass die Spieler ...
  - keine strikt dominierten Strategien spielen (Rationalität)
  - und verstehen, dass ihre Gegenspieler dies auch nicht tun

    (Wissen um die Rationalität der anderen) $\longrightarrow$ siehe später

Wiederholte Eliminierung als Kochrezept

Betrachte G. Sei $\hat{S}_i$ die Menge aller strikt dominierten Strategien für SPi

- Erste Runde:
  - streiche für jeden Spieler i alle strikt dominierten Strategien $\hat{S}_i$
  - damit entsteht ein neues Spiel G^1 mit Strategienräumen $S_i^1 = S_i \setminus \hat{S}_i$
- Zweite Runde:
  - streiche in G^1 für jeden SPi alle NUN strikt dom. Strategien $\hat{S}_i^1$
  - dadurch ensteht ein neues Spiel G^2 mit $S_i^2 = S_i^1 \setminus \hat{S}_i^1$
- Wiederhole dieses Verfahren so lange, bis es keine strikt dominierten Strategien mehr gibt

Beispiel: Betrachte das Spiel $G = (\{a,b,c\}, u_1, \{x,y,z\}, u_2)$

	x	y	z
a	$3, 1$	$2, -5$	$-3, 6$
b	$1, 7$	$0, 2$	$-5, -5$
c	$2, -3$	$-5, 4$	$0, -2$

Beispiel: Betrachte das Spiel $G = (\{a, b, c\}, u_1(\cdot), \{x, y, z\}, u_2(\cdot))$

	x	y	z
a	3, 1	2, -5	-3, 6
b	1, 7	0, 2	-5, -5
c	$2, -3$	$-5, 4$	$0, -2$

RUNDE 1: – In G ist für SP1 b strikt dominiert durch a

– SP2 hat keine strikt dominierte Strategie in G

– Durch Eliminierung von b erhalten wir

$$G^1 = (\{a, c\}, u_1, \{x, y, z\}, u_2)$$

$$G^1 = (\{a, c\}, u_1, \{x, y, z\}, u_2)$$

	x	y	z
a	$3, 1$	$2, -5$	$-3, 6$
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
c	$2, -3$	$-5, 4$	$0, -2$

$G^1 = (\{a, c\}, u_1(\cdot), \{x, y, z\}, u_2(\cdot))$

	x	y	z
a	$3,$ 1	$2, -5$	$-3,$ 6
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
c	$2,$ -3	$1, 4$	$0,$ -2

RUNDE 2: – In G^1 ist für SP2 x strikt dominiert durch z

– SP1 hat keine strikt dominierte Strategie in G^1

– Durch Eliminierung von x erhalten wir

$$G^2 = (\{a, c\}, u_1, \{y, z\}, u_2)$$

$G^2 = (\{a, c\}, u_1, \{y, z\}, u_2)$

	[redacted]	y	z
a	[redacted]	$2, -5$	$-3, 6$
[redacted]	[redacted]	[redacted]	[redacted]
c	[redacted]	$1, 4$	$0, -2$

RUNDE 3: – Es gibt keine strikt dominierten Strategien in G^2

– Verfahren endet

– Die Strategienmenge $\{(a, y), (a, z), (c, y), (c, z)\}$ überlebt

– Keine eindeutige Prognose!

Zu den Annahmen des Verfahrens

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

- Wie wir gesehen hatten:
  - c strikt dominiert in G
  - x strikt dominiert in G^1
- Also: Eliminierung führt zur eindeutigen Prognose (b, y)

Zu den Annahmen des Verfahrens

	x	y
a	$5, 3$	$5, 6$
b	$1, 1$	$12, 2$
c	$-1, 5$	$0, -2$

- Nimm nun an, beide SP sind rational, ABER ...
  - ... SP2 weiss NICHT, dass SP1 rational ist
- Dann kann SP2 nicht ausschliessen, dass SP1 c spielt
  - SP1 könnte z.B. “verrückt” sein oder “aus Versehen” c spielen
- Also sollte SP2 nicht unbedingt y spielen
- Entsprechend sollte dann SP1 nicht unbedingt b spielen

Wir müssen also annehmen, dass gilt:

- Jeder Spieler ist rational ...
- ... und jeder Spieler weiss, dass der andere Spieler rational ist ...
- ... und jeder Spieler weiss, dass die anderen wissen, dass alle Spieler rational sind ...
- ... und jeder Spieler weiss, dass die anderen wissen, dass alle Spieler wissen, dass alle Spieler rational sind ...
- ... und so weiter ad infinitum

Diese Eigenschaft nennt man

Common knowledge of rationality

In gleicher Weise muss gelten:

Das Spiel G ist common knowledge

- Jeder Spieler kennt G ...
- ... und jeder Spieler weiss, dass die anderen G kennen ...
- ... und jeder Spieler weiss, dass die anderen wissen, dass alle Spieler G kennen ...

- Denn sonst könnte es sein, dass z.B. SP1 die Nutzen von SP2 nicht kennt

- Dann würde aber SP1 die strikt dominierten Strategien von SP2 nicht kennen (und könnte sie nicht eliminieren)

Dominanzlösbarkeit

Definition: G heisst dominanzlösbar, wenn wiederholte Eliminierung strikt dominierter Strategien für jeden Spieler genau eine Strategie übrig lässt

Wie oben gesehen: Nicht jedes Spiel ist dominanzlösbar

Viele Spiele haben überhaupt keine strikt dominierten Strategien

Im folgenden betrachte wir:

– einfache strategische Implikationen

– soziale Dilemmata

Implikation “Besserstellung durch Verschlechterung”

	x	y
a	$1, 3$	$4, 1$
b	$0, 2$	$3, 4$

- Beachte: b ist strikt dominiert für SP1
  - Also spielt SP2 x
  - Lösung: (a, x) und SP 1 erhält 1
- Nimm nun an, die Lage von SP1 “verschlechtert sich”:
  - a bringt ihm immer 2 Nutzeneinheiten weniger (z.B Steuer auf a)
  - Sonst bleibt alles beim Alten

Implikation "Besserstellung durch Verschlechterung"

ALT	x	y
a	$1, 3$	$4, 1$
b	$0, 2$	$3, 4$

NEU	x	y
a	$-1, 3$	$2, 1$
b	$0, 2$	$3, 4$

- Im neuen Spiel: a ist strikt dominiert für SP1
  - Dies "zwingt" SP2 auf y
- Neue Lösung: (b, y) und SP 1 erhält 3 (anstatt 1)!

Was passiert?

- “Steuer” auf a veranlasst SP1, b zu wählen
- Dies ALLEIN reicht aber nicht, um ihn besser zu stellen
  - denn am Nutzen von b hat sich nichts geändert
- WITZ
  - “Steuer” auf a verändert die Prognose von SP2(!!) über SP1
  - SP2 erwartet jetzt, dass SP1 b spielt ...
  - ... und wählt daher y (anstatt x)
  - Das stellt SP1 besser, weil sein Nutzen davon abhängt was SP2 tut!
- Effekt ist unmöglich in <u>nicht</u>-strategischen Entscheidungsproblemen

Soziale Dilemmata

- Der Begriff "Soziale Dilemma" wird häufig verwendet, wenn ...

  ... es einen Konflikt zwischen Allgemein- und Eigenwohl gibt.

  – Umweltschutz, öffentliche Güter, ruinöser Wettbewerb, ...

- Viele Soziale Dilemmata lassen sich vollständig durch Dominanz analysieren (nicht alle)

  – das paradigmatische Beispiel ist das GD

Das Gefangenendilemma

	Schweigen	Gestehen
Schweigen	$-1,\ -1$	$-10,\ 0$
Gestehen	$0,\ -10$	$-5,\ -5$

- Beachte: Schweigen ist strikt dominiert!
- Also: Das GD ist dominanzlösbar!
  – (Gestehen, Gestehen) ist eindeutige Prognose!
- Das GD heisst Dilemma, denn
  – die Gefangenen wären besser gestellt, wenn sie beide Schweigen würden
  – und dennoch Gestehen sie beide!

Beispiel: Umweltprobleme als Gefangenendilemmata

- Anna und Otto können mit Auto oder U-Bahn zur Uni fahren
- Wenn beide U–Bahn fahren, erhalten sie je einen Nutzen von 0
- Eine Autofahrt bringt je 3 Nutzeneinheiten ...
  - ... verschlechtert aber die Luft um 2 Nutzeneinheiten pro Spieler
- Entscheidend: beide leiden unter der Luftverschlechterung
  - saubere Luft ist ein öffentliches Gut

	U-Bahn	Auto
U-Bahn	0,0	–2,1
Auto	1, –2	–1,–1

Was passiert?

- Spieler internalisieren nicht die sozialen Auswirkungen ihres Handelns
- Genauer: Fährt ein SP Auto, hat das für alle SP Kosten
  - ein SP muss aber nicht die vollen sozialen Kosten tragen
- Die privaten Kosten aus Autofahren sind kleiner als die sozialen Kosten:
  - private Kosten = 2,   soziale Kosten = 4
- Der private Nutzen ist aber gleich dem sozialen Nutzen: beide $= 3$
- Folge: der private Anreiz, Auto zu fahren ist aus sozialer Sicht zu groß
- Damit: Die kollektiv optimale Strategie ist individuell irrational

Diskussion

- Die strategische Struktur im GD ist gleich der im Umweltbeispiel:
  - Die Spieler internalisieren die sozialen Folgen ...

    ... ihres Handelns nur unzureichend.
- Dies kann erklären, warum viele Leute für Umweltschutz sind ...

  ... und sich gleichzeitig anders verhalten
- In sozialen Dilemmata versagt die Unsichtbare Hand
  - Dezentrales, eigennutzorientiertes Verhalten ...

    ... führt nicht zum effizienten Ergebnis

Diskussion

- Manche Kritiker finden das GD kontra-intuitiv und meinen daher ...
  - ... die Prognosen der Spieltheorie seien nicht überzeugend
- DABEI: Nichts verwendet ausser sehr plausiblem Dominanzprinzip
- UND: Spieler wählen unabhängig!
  - ein Spieler kann durch seine Strategiewahl die Strategiewahl ...

  ... der anderen Spieler nicht beeinflussen!

Diskussion

- Unter veränderten Rahmenbedingungen ändert sich die Prognose
- Wenn die Gefangenen einen bindenden Vertrag schreiben können
  - der z.B. vom Mafiaboss durchgesetzt wird, ...
  - dann ist (Schweigen, Schweigen) möglich
  - aber dann: ANDERES Spiel, GD falsches Modell
- Werden später sehen: wenn das GD wiederholt gespielt wird, ändert sich Prognose radikal

Diskussion

- In Experimenten: <u>viel mehr "Kooperation" (Schweigen)</u> als prognostiziert
  - mögliche Erklärung: soziale Normen, moralische Vorstellung
  - wenn das so ist: GD bildet Nutzen falsch ab!
- Schliesslich: Unterscheidung SEIN und SOLLEN
  - Spieltheorie sagt nur: Im GD <u>werden</u> rationale Akteure Gestehen
  - Spieltheorie sagt NICHT: man <u>soll</u> Gestehen
  - Sollensfrage fragt nach dem "richtigen Nutzen" (Kant)

Fazit: Dominanz

- Das Dominanz-Lösungskonzept untersucht ...

  ... welche Implikationen sich für strategische Situationen ergeben

  – wenn man <u>nur</u> Rationalität annimmt (wie in Entscheidungstheorie)

  – und common knowledge of rationality fordert

  – Dominanz ist ein sogenanntes <u>deduktives</u> Lösungskonzept

- Doch bereits dabei zeigt sich:

  - Spiele fundamental anders als Entscheidungsprobleme

  - "Besserstellung durch Verschlechterung"

Fazit: Dominanz

- Viele Soziale Dilemmata lassen sich bereits allein durch das Dominanzkonzept analysiseren
- Das Dominanzkonzept liefert in vielen interessanten Fällen ...

  ... allerdings keine eindeutige Prognose

  – sehr unbefriedigend für eine wissenschaftliche Theorie

  – Theorien sollten nicht "zu viel" erklären können
- Ausweg: schwache Dominanz, Nash–Gleichgewicht