KAP 3. Spiele mit mehr als zwei Spielern

- Wir verallgemeinern Bi–Matrix Spiele auf beliebig viele Spieler
- Es gibt nun n Spieler $i = 1, \ldots, n$
- Eine typische Strategie für SPi bezeichnen wir mit s_i ...
  - ◇ S_i ist die Menge aller möglichen Strategien von SPi
- Ein Tupel $s = (s_1, ..., s_n)$ heißt Strategienprofil
  - ◇ $S = S_1 \times ... \times S_n$ ist die Menge aller Strategienprofile
- Wird das Strategienprofil $s = (s_1, ..., s_n)$ gespielt, so erhält SPi den Nutzen

$$u_i(s_1, ..., s_n)$$

Normalform

Definition Ein Spiel G in **Normalform** (auch: Strategieform) besteht aus den folgenden 3 Elementen:

- Einer Menge von Spielern $i \in I = \{1, ..., i, ...n\}$
- Einem Strategienraum S_i für jeden Spieler i
- Einer Nutzenfunktion für jeden Spieler:

$$u_i : S_1 \times \ldots \times S_n \to \mathbb{R}, \qquad (s_1, \ldots, s_n) \mapsto u_i(s_1, \ldots, s_n)$$

Schreibweise: $G = (I, S_1, \ldots, S_n, u_1, \ldots, u_n)$

Oder: $G = (S_i, u_i)_{i=1}^n$

Notationen

- Häufig sind wir daran interessiert, was sich verändert, wenn ...

  ... <u>nur</u> i seine Strategie ändert,

  ... alle <u>anderen</u> Spieler aber ihre Strategien <u>beibehalten</u>

- Für ein solches Strategienprofil der Gegenspieler von i schreiben wir

$$s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$$

- Damit: $u_i(s_i, s_{-i})$ = Nutzen von SPi, wenn er s_i gegen s_{-i} spielt

- Entsprechend sei

$$S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$$

  die Menge aller Strategienprofile ohne Strategie von SPi

Dominanz

- Das Dominanzkonzept überträgt sich auf allgemeine Normalformenspiele:

Definition Sei G ein Spiel in Normalform. Eine Strategie $\widehat{s}_i \in S_i$ heisst strikt dominiert, wenn es eine andere Strategie $s_i \in S_i$ gibt, so dass

$$u_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{für alle} \quad s_{-i} \in S_{-i}$$

- Entsprechend übertragen sich
  - "Wiederholte El. strikt dominierter Strategien" und "Dominanzlösung"

Beispiel: Soziales Dilemma

- Es gibt n Spieler, die in ein öffentliches Gut investieren können:

  ◇ $S_i = \{0, 1\}$, $s_i = 1$ → "investieren", $s_i = 0$ → "nicht inv."

- Das öffentliche Gut hat für jeden Spieler einen Wert von:

$$q(s) = \alpha \cdot (s_1 + \ldots + s_n)$$

- Investieren kostet s_i. Also individueller Nutzen von SPi:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = q(s) - s_i$$

- Nimm an: $1/n < \alpha < 1$

Soziales Optimum

- Das Soziale Optimum ist definiert als das Strategienprofil s^* welches die "Gesamtwohlfahrt" W maximiert:

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} u_i(s) = nq(s) - \sum_{i=1}^{n} s_i$$

- Offensichtlich hängt W nur davon ab, wie viele SP investieren,

  ... und nicht, wer.

- Wenn k Spieler investieren: $\quad W = n\alpha k - k = (n\alpha - 1)k$

- Also: $k^* = n$ ist sozial optimal, denn $n\alpha > 1$

Dominanzlösung

- Beachte: $s_i = 1$ ist strikt dominiert, denn für alle s_{-i}:

$$u_i(1, s_{-i}) = \alpha \sum_{j \neq i} s_j + \alpha - 1$$
$$u_i(0, s_{-i}) = \alpha \sum_{j \neq i} s_j$$

  ◇ Da $\alpha < 1$ per Annahme, folgt: $u_i(1, s_{-i}) < u_i(0, s_{-i})$

- Also: $s_i = 0$ für alle i ist Dominanzlösung!

- Fazit: – Im sozialen Optimum sollte <u>jeder</u> investieren

  – Unter der Dominanzlösung investiert <u>niemand</u>

Beispiel: Teamproblem

- Es gibt n Spieler $i = 1, \ldots, n$.
- Jeder Spieler wählt ein Anstrengungsniveau aus $S_i = [0, \infty)$.
- Ein Strategienprofil s generiert den Output

$$y(s) = s_1 + \ldots + s_n + g \cdot s_1 \cdot \ldots \cdot s_n$$

  mit $g \geq 0$

- – Anstrengung s_i verursacht für SPi Kosten von $c_i(s_i)$.

  – Der Output wird gleichmäßig unter den Spielern geteilt:

$$u_i(s_1, \ldots, s_I) = \frac{1}{n} y(s) - c_i(s_i)$$

KAP 4. Schwache Dominanz

- Man kann das Dominanzkonzept leicht abschwächen ...

  ... um schärfere Prognosen zu bekommen.

- Man kann unterstellen, dass die Spieler nicht nur

  ... keine strikt dominierten Strategien spielen ...

  ... sondern auch keine <u>schwach</u> dominierten

Schwache Dominanz

	x	y	z
a	0,0	0,5	3,2
b	2,1	0,0	4,0

- Es gibt kein strikt dominierten Strategien!
- Aber betrachte Strategie a von SP1:
  - gegen alle Strategien von SP2 ist b mindestens gleich gut wie a
  - und gegen x oder z ist b sogar strikt besser als a
- Wir sagen: "a ist schwach dominiert durch b"

Definition Sei G ein Spiel in Normalform. Eine Strategie $\widehat{s}_i \in S_i$ heisst schwach dominiert, wenn es eine andere Strategie $s_i \in S_i$ gibt, so dass

$$u_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) \leq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{für alle} \quad s_{-i} \in S_{-i} \tag{1}$$

$$u_i(\widehat{s}_i, s_{-i}) < u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{für mindestens ein} \quad s_{-i} \in S_{-i} \tag{2}$$

Bemerkung: Analog zur wiederholten Elim. strikt dominierter Strategien ...

... können wir nun schwach dominierte Strategien eliminieren

– dies führt im allgemeinen zu einer stärkeren Einschränkung der möglichen Spielausgänge

Wiederholte Eliminierung schwach dominierter Strategien

	x	y	z
a	0,0	0,5	3,2
b	2,1	0,0	4, 0
c	–1, –1	2,0	1,3

Runde 1: a ist schwach dominiert durch b

Runde 2: y ist schwach dominert durch z

Runde 3: c ist strikt dominiert durch b

Runde 4: z ist strikt dominiert durch x

Also: (b, x) ist <u>schwache</u> Dominanzlösung

Beachte: <u>Alle</u> Strategien überleben Wdh. El. strikt dom. St.

Schwache Dominanz und Rationalität

	x	y
a	2,0	2,0
b	0,3	0,1

- b is strikt dominiert durch a, y schwach dominiert durch x
- Also wird SP1 a spielen
  - dann ist SP2 aber indifferent zwischen x und y
  - er könnte also auch seine schwach dominierte Strategie spielen
- Rationalität allein impliziert also streng genommen nicht ...

  ... dass keine schwach dominierten Strategien gespielt werden
- Schwache Dominanz ist eher Plausibilitätskriterium

Zweitpreisauktion

- Die Zweitpreisauktion ist ein oft verwendetes Auktionsverfahren
  - z.B. eBay verwendet eine Version einer Zweitpreisauktion
- Auktionsregel:
  - Das höchstes Gebot gewinnt
  - Der Gewinner zahlt das zweithöchste Gebot
- Zweitpreisauktion ist schwach dominanzlösbar!

Zweitpreisauktion

- Es gibt ein Auktionsobjekt und n Spieler (Bieter)

- Die Bewertung des Objektes von SPi sei $v_i > 0$

- Jeder SP kann ein (nicht negatives)Gebot abgeben: $S_i = [0, \infty)$

- $\diamond$ Falls $s_i > s_j$ für alle $j \neq i$, dann

$$u_i(s_i, s_{-i}) = v_i - \max\{s_i, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n\}$$

  $\diamond$ Falls $s_i < s_j$ für ein $j \neq i$, dann: $u_i(s_i, s_{-i}) = 0$

  $\diamond$ Falls $s_i = s_j$ für ein $j \neq i$ und $s_i \geq s_k$ für alle k, dann wird gelost

- Bsp: $n = 2$, $s_1 = 3$, $s_2 = 5$. SP2 gewinnt und $u_2 = v_2 - 3$.

Zweitpreisauktion

Behauptung: Bieten der eigenen Wertschätzung ist schwach dominante Strategie, d.h.:

Jede Strategie $s_i \neq v_i$ ist schwach dominiert durch die Strategie $s_i^* = v_i$.

Vorteil der Zweitpreisauktion: Einfach zu spielen