KAP 5. Nash-Gleichgewicht

- Dominanz beschreibt, was rationale Spieler (nicht) tun, wenn ...
  - ... sie überlegen, was Gegenspieler (nicht) tun
- i.d.S. erfasst Dominanz den Kern strategischen Denkens
  - Spieler nutzen ihr Wissen über ihre Gegenspieler ...
  - ... um deren Verhalten zu prognostizieren
- Man sagt: Dominanz ist ein deduktives Lösungskonzept

- Dominanz ist allerdings ungeeignet für gute Prognosen über reale soziale Zusammenhänge, denn:

  (a) zu geringe Vorhersagekraft: viele Strategien können überleben

  (b) Spieler müssen um potentiell sehr viele Ecken denken können

    - eher unrealistisch

- Auswege

  (a) man kann Dominanz ein wenig verfeinern ("Rationalisierbarkeit")

  (b) ersetze deduktives durch <u>steady-state</u> Lösungskonzept

    - welche Spielausgänge sind <u>stabil</u> ...

    - ... insofern, als rationale Spieler nicht davon abweichen wollen?

Anna und Otto treffen sich zu Kaffee und Kuchen

		Anna	
		Kaffee	Kuchen
Otto	Kaffee	0,0	1,2
	Kuchen	2,1	0,0

- Keine strikt dominierten Strategien!
- Angenommen, Anna und Otto treffen sich regelmässig
  - es erscheint unplausibel, dass sie immer jeweils das gleiche mitbringen
- Man würde erwarten, dass sie sich auf Dauer “irgendwie einigen” ...
  - ... darauf, dass der eine Kaffee, der andere Kuchen mitbringt

Anna und Otto treffen sich zu Kaffee und Kuchen

	Kaffee	Kuchen
Kaffee	0,0	1,2
Kuchen	2,1	0,0

- Sie könnten sich etwa darauf absprechen, dass
  - Otto Kuchen und Anna Kaffee mitbringt
- Diese Absprache ist stabil, denn

wenn beide glauben, dass der andere sich daran hält,

will keiner davon abweichen

Anna und Otto treffen sich zu Kaffee und Kuchen

	Kaffee	Kuchen
Kaffee	0,0	1,2
Kuchen	2,1	0,0

- Wenn Anna glaubt, Otto bringt Kuchen, dann
  - bekommt sie 1, wenn sie Kaffee bringt
  - aber nur 0, wenn sie Kuchen bringt
- Analoges gilt für Otto
- Also will keiner von der Absprache (Kuchen, Kaffee) abweichen

Anna und Otto treffen sich zu Kaffee und Kuchen

	Kaffee	Kuchen
Kaffee	0,0	1,2
Kuchen	2,1	0,0

- Die Absprache (Kaffee, Kaffee) ist hingegen <u>nicht</u> stabil!
- Otto würde zu Kuchen abweichen wollen, denn
  - wenn er glaubt, Anna bringt Kaffee
  - dann bekommt er 2, wenn er Kuchen bringt
  - aber nur 0, wenn er Kaffee bringt
- Entsprechend würde Anna zu Kuchen abweichen wollen

Stabile soziale Konventionen

- Eine Verhaltensregel (oder soziale Konvention) ist <u>stabil</u>, wenn gilt:
  - gegeben <u>alle anderen</u> Spieler halten sich daran ...
  - ... so ist es für jeden Spieler individuell optimal, sich auch daran zu halten
- Man sagt auch: "selbstdurchsetzend" (self-enforcing)
- Soziale Konventionen, die nicht stabil sind ...
  - ... werden sich "auf Dauer" nicht etablieren
  - ... denn für einige Spieler ist es lohnend, davon abzuweichen
- Als <u>systematische</u> Prognose sollte ein Spielausgang stabil sein

Stabile soziale Konventionen

- Formal ist eine soziale Konvention nichts anderes als ein Strategienprofil $s = (s_1, ..., s_n)$
  - wobei s_i die individuelle "Regel" für Spieler i ist
- Ein Strategienprofil, das stabil (self-enforcing) ist, wird nun als Nash-Gleichgewicht definiert

Definition Sei G eine Normalform. Das Strategienprofil $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ heisst **Nash-Gleichgewicht** von G, wenn für alle i gilt:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{für alle} \quad s_i \in S_i$$

In Worten: Für jeden Spieler i gilt:

Wenn alle anderen s_{-i}^* spielen, habe ich keinen Anreiz, von s_i^* zu einer anderen Strategie s_i abzuweichen

Nash-GG ist das wichtigste Konzept der Spieltheorie

– John Nash: Nobelpreis 1994

– Biografie: Sylvia Nasar - A beautiful mind (Film mit Russell Crowe)

Anna und Otto treffen sich

	Kaffee	Kuchen
Kaffee	0,0	1,2
Kuchen	2,1	0,0

- (Kaffee, Kuchen) ist N-GG, denn
  - $u_O(\text{Kaffee, Kuchen}) = 1 > 0 = u_O(\text{Kuchen, Kuchen})$
  - $u_A(\text{Kaffee, Kuchen}) = 2 > 0 = u_A(\text{Kaffee, Kaffee})$
- Genauso: (Kuchen, Kaffee) ist N-GG
- **BEACHTE**: N-GG ist definiert als ein Strategienprofil
  - das Nutzenpaar (1,2) oder (2,1) ist KEIN N-GG !!

Nash-GG als gegenseitige beste Antworten

- Man kann Nash-GG einfach charakterisieren in termini bester Antworten

- Eine beste Antwort von Spieler i gegen die Strategie s_{-i} ist

  - die nutzenmaximierende Strategie, wenn die Gegenspieler s_{-i} spielen

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP1 auf x?

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP1 auf x?

Wir schreiben: $R_1(x) = b$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP1 auf y?

$$R_1(y) = a$$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP1 auf z?

$$R_1(z) = c$$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP2 auf a?

$$R_2(a) = x$$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP2 auf b?

$$R_2(b) = y$$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

Was ist die beste Antwort von SP2 auf c?

$$R_2(c) = z$$

	x	y	z
a	0,4	4,0	5,3
b	4,0	0,4	5,3
c	3,5	3,5	6,6

BEOBACHTUNG: (c, z) ist Nash-GG, denn:

- Für Spieler 1: c BA auf z
  - Also hat SP1 keine profitable Abweichung gegen z
- Für Spieler 2: z BA auf c.
  - Also hat SP2 keine profitable Abweichung gegen c

Gegenseitige beste Antworten bilden Nash-GG!

Allgemeine Definition Beste Antwort

- Betrachte SPi und fixiere eine <u>beliebige</u> Strategie s_{-i} der Gegenspieler
- Betrachte eine <u>beste</u> Strategie s_i^* für Spieler i gegen s_{-i}:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \quad \text{für alle} \quad s_i \in S_i$$

  ◇ Eine solche Strategie s_i^* heisst

beste Antwort von i auf s_{-i}

- Wir definieren Spieler i's **Reaktionsfunktion**

$$R_i(s_{-i}) = \text{beste Antwort von } i \text{ auf } s_{-i}$$

  ◇ $R_i(\cdot)$ ist eine Funktion mit Urbildmenge S_{-i}

  ◇ (... und kann eine Menge sein, wenn es mehrere beste Antworten gibt)

Beispiel mit stetigem Strategienraum

- Sei G gegeben durch
  - ◇ $I = \{1, 2\}$, $S_1 = S_2 = [0, 1]$
  - ◇ $u_1(s_1, s_2) = -3s_1^2 + s_1 s_2 + 3s_1 + 1$
  - ◇ $u_2(s_1, s_2) = -3s_2^2 + s_2 s_1 + 3s_2 + 1$
- Die Reaktionsfktn von SP1 ergibt sich durch Maximierung von $u_1(\cdot, s_2)$

über s_1:

$$\frac{\partial u_1(s_1^*, s_2)}{\partial s_1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_1^* = \frac{s_2 + 3}{6}$$

- ◇ Also: $R_1(s_2) = \frac{s_2+3}{6}$
- ◇ Analog: $R_2(s_1) = \frac{s_1+3}{6}$

Nash-GG als gegenseitige beste Antworten

- s^* ist Nash-GG genau dann, wenn für alle i gilt:

$$s_i^* = R_i(s_{-i}^*) \qquad\qquad [\text{bzw. } s_i^* \in R_i(s_{-i}^*)]$$

- Denn dann gilt gemäß Definition von R_i für alle i

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \quad \text{für alle} \quad s_i \in S_i$$

- Und das ist gerade die Definition des Nash-GG!

Also: Nash-GG ist ein Strategienprofil, in dem alle individuellen Strategien gegenseitig beste Antworten aufeinander sind

Wie findet man Nash-GG?

In Bi-Matrix Spielen

	x	y	z
a	$0, 4$	$4, 0$	$5, 3$
b	$4, 0$	$0, 4$	$5, 3$
c	$3, 5$	$3, 5$	$6, 6$

- Bestimme beste Antwort für SP1

Wie findet man Nash-GG?

In Bi-Matrix Spielen

	x	y	z
a	$0, 4$	$4^*, 0$	$5, 3$
b	$4^*, 0$	$0, 4$	$5, 3$
c	$3, 5$	$3, 5$	$6^*, 6$

- Bestimme beste Antwort für SP1
- Dann für SP2

Wie findet man Nash-GG?

In Bi-Matrix Spielen

	x	y	z
a	$0, 4^*$	$4^*, 0$	$5, 3$
b	$4^*, 0$	$0, 4^*$	$5, 3$
c	$3, 5$	$3, 5$	$6^*, 6^*$

- Bestimme beste Antwort für SP1
- Dann für SP2
- Gegenseitige beste Antworten sind N-GG: (c, z) ist N-GG

Wie findet man Nash-GG?

- mit stetigen Strategienräumen

Graphische Lösung (via Reaktionsfunktion) :

– Zeichne $R_1(\cdot)$ und $R_2(\cdot)$ im (s_1, s_2)-Achsenkreuz

– Schnittpunkt ist Nash-GG

  – Geht nur für zwei Spieler

<u>Algebraische Lösung</u>:

- Betrachte die Bedingungen erster Ordnung

$$\frac{\partial u_1(s_1,\ldots,s_n)}{\partial s_1} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial u_n(s_1,\ldots,s_n)}{\partial s_n} = 0$$

  – System von n Gleichungen in den n Unbekannten $s_1,\ldots,s_n$

- Lösung des Systems ergibt N-GG $(s_1^*,\ldots,s_n^*)$

ACHTUNG: Bedingungen zweiter Ordnung checken!!

Gilt auch für alle $i = 1,\ldots,n$

$$\frac{\partial^2 u_i(s_1^*,\ldots,s_n^*)}{\partial s_i^2} < 0 \qquad ??$$

Anwendung: Cournot–Oligopol

- Betrachte Mengenwettbewerb zwischen n Firmen
  - ◇ Es gibt ein Gut
  - ◇ Jede Firma i wählt eine Ausbringungsmenge $q_i \geq 0$:
  - ◇ Dadurch ergibt sich der Preis: $P(q_1, \ldots, q_n) = 10 - (q_1 + \ldots + q_n)$
  - ◇ Die Produktionskosten sind: $c(q_i) = 4q_i$ (Grenzkosten = 4)
  - ◇ Die Gewinnfunktion ist also:

$$\begin{aligned}\pi_i(q_1, \ldots, q_n) &= P(q_1, \ldots, q_n)q_i - c(q_i) \\ &= [10 - (q_1 + \ldots + q_n)]q_i - 4q_i\end{aligned}$$

- Nash-GG: $q_i^* = \frac{6}{n+1}$ für alle i

Anwendung: Cournot–Oligopol

- Gleichgewichtspreis $P(q_1^*, \ldots, q_n^*) = 10 - 6\frac{n}{n+1} > 4$
  - ◇ d.h.: Preis $>$ Grenzkosten
  - ◇ Jede Firma hat Marktmacht
- Aber im Limes, wenn $n \to \infty$, dann $P(q_1^*, \ldots, q_n^*) \to 4$
  - ◇ d.h.: Preis konvergiert gegen Grenzkosten,...

    ... wenn Anzahl der Firmen wächst
  - ◇ wie vollkommener Wettbewerb!

Multiple Nash-GGe

- Bereits gesehen: Nash-GG NICHT immer eindeutig
  – (Kaffee, Kuchen) und (Kuchen, Kaffee) waren beides N-GGe
- Wenn man der Meinung ist, ...
  – ... Theorien müssten eindeutige Prognosen liefern, ...
  – ... dann ist das ein Nachteil des Nash-Konzepts
- Allerdings gibt es a priori keinen überzeugenden Grund, ...

  ... warum es nicht mehrere stabile soziale Konventionen geben sollte

Beispiel: Strassenverkehr

	Links	Rechts
Links	1,1	0,0
Rechts	0,0	1,1

- Das Spiel hat zwei Nash-GGe: (Links, Links) und (Rechts, Rechts)
  - das erste GG beschreibt Grossbritannien, das zweite den Kontinent
- Existenz mehrerer Nash-GGe kann erklären, warum ...
  – in verschiedenen Gesellschaften verschiedene Konventionen bestehen ...
  – obwohl die ökonomischen Grunddaten (fundamentals) gleich sind
- Dies ist eine Stärke des Nash-Konzepts

Welches Nash-GG, wenns mehrere gibt?

- Spiele mit mehreren Nash-GGen sind <u>Koordinationsspiele</u>
  - spekulative Attacken auf Währungsreserven
  - Wettbewerb in Märkten mit Netzeffekten (Microsoft vs Apple)
- Frage: wie koordinieren sich die Spieler?
- Das Nash-Konzept <u>allein</u> liefert hierfür keine Erklärung
- Häufig können "Dritte" eine wichtige Koordinationsrolle übernehmen
  - Zentralbank, Werbung
- Shelling (1961) argumentiert, dass es in bestimmten Spielen offensichtliche (sog. <u>fokale</u>) GGe gibt

Welches GG? – Fokale GGe

Hi-Lo

	x	y
a	5,5	0,0
b	0,0	1,1

- Zwei Nash-GGe: (a, x), (b, y)
  - (a, x) liefert payoff von $(5, 5)$, (b, y) liefert $(1, 1)$
- Es liegt auf der Hand (es ist fokal), (a, x) zu spielen
  - hier: Höhe der payoffs impliziert Fokalität
- in 99% der Fälle wird im Labor tatsächlich (a, x) beobachtet

Welches GG? – Fokale GGe

Meeting in New York

	Times Square	34th St
Times Square	5,5	0,0
34th St	0,0	5,5

- Reines Koordinationsspiel: Zwei Nash-GGe: (TS, TS), (34,34)
- Schelling argumentiert, dass (TS, TS) fokal ist
  - TS als allgemein bekannter Treffpunkt impliziert Fokalität
- Fokalitätskriterium bleibt im allgemeinen aber schwammig
  - kontext- und kulturabhängig

Welches GG? – pre-play communication

- Ein anderes Koordinationsinstrument ist pre-play communication
  - Wenn die Spieler vor dem Spiel kommunizieren können, ...
  - ... würde man erwarten, dass die Koordination erleichtert wird, ...
  - ... insbesondere wenn ein GG das andere Pareto-dominiert wie in Hi-Lo
- Allerdings ist pre-play communication selbst ein Spiel
  - und sollte daher explizit modelliert werden

Nash-GG und Erwartungen

- Rationale Spieler spielen eine beste Antwort gegen ...

  ... die <u>erwarteten</u> Strategien der Gegenspieler

- Im Nash–GG spielt jeder Spieler eine beste Antwort ...

  ... gegen die <u>tatsächlichen</u> Strategien der Gegenspieler

- Wir können also das Nash–GG als einen Zustand interpretieren, in dem
  - ◇ ... sich jeder Spieler rational verhält ...
  - ◇ ... UND die Erwartungen der Spieler <u>korrekt</u> sind

- Man sagt: "Im Nash-GG sind die Erwartungen erfüllt"

Wie kommt es, dass Leute Nash-GG spielen?

- Generell stellt sich die Frage: warum spielen Leute Nash-GG?
- Anders gesagt: wie etabliert sich eine stabile soziale Konvention?
- Konzept sagt nicht, <u>wie</u> es dazu kommt, dass Nash-GG gespielt wird
  - Insbesondere nicht klar, dass Spieler Nash spielen, ...
  - ... wenn sie nur ein einziges mal interagieren
- Es identifiziert lediglich Strategien, an die sich rationale Spieler halten ...
  - ... WENN sie <u>erwarten</u>, dass sich die anderen daran halten
  - ... woher diese Erwartungen kommen, wird nicht explizit erklärt

Korrekte Erwartungen, wenn es bereits ein Konvention gibt

- Angenommen, es hat sich bereits eine Konvention etabliert
  - z.B. Linksverkehr
  - gesellschaftliche Rollenvorstellungen (Anna backt immer Kuchen ...)
- Dann sollten Leute Nash spielen

Korrekte Erwartungen im long run

- Nash selbst hatte (wohl) eine dynamische Vorstellung
  - Wenn die SP über die Zeit hineweg immer wieder interagieren ...
  - ... sollten sie lernen, das Verhalten ihrer Gegenspieler zu prognostizieren
  - ... und ihr Verhalten sollte zu einem Nash-GG konvergieren (steady state)
- Explizite Modelle solcher Konvergenzprozesse werden z.B. in der evolutorischen Spieltheorie untersucht
  - in der Tat: Verhalten von Tierpopulationen ist häufig Nash
  - lesenswert: Karl Sigmund - Games of Life

Korrekte Erwartungen durch Mediator

- Manchmal können Erwartungen durch “Dritte” induziert werden
  - Vorlesungsverzeichnis
  - Verkehrsregeln (rechts vor links)
- Einen solchen Dritten nennt man Mediator
- Der Mediator macht den Spielern Vorschläge
  - Wenn der Vorschlag Nash-GG ist ...
  - ... dann werden die Spieler sich daran halten

Warum also Nash-GG als DAS Lösungskonzept der Spieltheorie

- Alles, was kein Nash-GG ist, erscheint als Prognose unplausibel:
  - Auch wenn im <u>Einzelfall</u> nicht immer Nash-GG gespielt wird, ...
  - ... würde man dies auf Dauer nicht erwarten
  - ... denn sonst hätten Spieler Anreize, davon abzuweichen
- Nash-GG als Verhaltensprognose erscheint besonders plausibel, ...
  - wenn es bereits eine stabile soziale Konvention gibt
  - wenn die Spieler "erfahren" sind
  - wenn es einen Dritten gibt, der Erwartungen induzieren kann