KAP 6. Dominanz und Nash-GG

- Nash-GG (teilweise) dadurch motiviert:
  - schränkt Menge möglicher Spielausgänge stärker ein als Dominanz
- Stimmt das immer und in welchem Sinne?
- Gibt's stets weniger Nash-GGe als Strategien, die die wiederholte Eliminierung strikt oder schwach dominierter Strategien überleben?
- Oder sogar: überlebt jedes Nash-GG wiederholte Eliminierung?

Dominanz und Nash-GG

- Werden sehen:
  - Die Menge aller Nash-GG ist eine Teilmenge aller Strategienprofile, ...

    ... die die wiederholte Eliminierung <u>strikt</u> dominerter Strategien überleben
  - Jede <u>strikte</u> Dominanzlösung ist ein Nash-GG
- Also: Nash-Konzept stärker als Wiederholte Eliminierung <u>strikt</u> dominierter Strategien
- Aber: Es gibt Spiele, in denen das Nash–GG eine <u>schwach</u> dominierte Strategie aufweist

Definition Sei G eine Normalform mit Strategienraum S

- Wir bezeichnen mit

$$S^{WE}$$

die Menge aller Strategien $s \in S$, welche die wiederholte Eliminierung strikt dominierter Strategien überleben

- Wir bezeichnen mit

$$S^{N}$$

die Menge aller Nash-GGe in S

Satz (a) Es gilt

$$S^N \subseteq S^{WE}$$

D.h.: Jedes Nash-GG überlebt Wiederholte Eliminierung

(b) Es gilt

$$S^{WE} = \{s^*\} \Rightarrow S^N = \{s^*\}$$

D.h.: Ist G dominanzlösbar, dann ist die Dominanzlösung ein Nash-GG

Beachte (b) folgt nicht aus (a), denn S^N könnte leer sein

Nash–GG und Schwache Dominanz

	x	y
a	$0, 1$	$0, 0$
b	$0, 0$	$1, 1$

- Zwei Nash–GGe: (a, x) und (b, y)
- Beachte: a ist schwach dominiert durch b
- Also: Schwach dominierte Strategien können Teil eines Nash–GG sein
  - (im Unterschied zu strikt dominierten Strategien, siehe oben)

KAP 7. Gemischte Strategien

- Nicht alle Spiele haben ein Nash-GG, z.B. Matching Pennies

	Kopf	Zahl
Kopf	–1, +1	+1, –1
Zahl	+1, –1	–1, +1

- Grund:
  - Nimm an, es gäbe eine soziale Konvention, wonach SP1 ...

    ... immer Kopf zu spielen hätte
  - Dann würde SP2 immer Kopf spielen
  - Und SP1 würde immer von Kopf abweichen wollen
- Also kann eine solche Konvention nicht stabil sein

Gemischte Strategien

- Matching Pennies erfasst eine strategische Situation ...
  - ... in der die Spieler sich nicht "ausrechenbar" machen wollen
  - ... weil sie sonst geschröpft werden könnten
- In einer solchen Situation kann es keine stabile soziale Konvention geben, die den Spielern vorschreibt, eine Strategie mit Wkt 1 zu spielen
- Wir erweiten daher den Begriff der Strategie um die Möglichkeit, ...
  - ... eine Strategie mit einer bestimmten Wkt zu spielen
- Eine solche <u>erweiterte</u> Strategie heisst

gemischte Strategie

	Kopf $[\kappa_2]$	Zahl $[\zeta_2]$
Kopf $[\kappa_1]$	–1,+1	+1,–1
Zahl $[\zeta_1]$	+1,–1	–1,+1

- Ein SP wählt nun eine Wahrscheinlichkeit, ...

  ... mit der er die reinen Strategien Kopf bzw. Zahl wählt

  ◇ Sei $\kappa_i \in [0, 1]$ die Wkt, mit der SPi Kopf spielt

  ◇ Entsprechend: $\zeta_i = 1 - \kappa_i$ ist die Wkt, mit der SPi Zahl spielt

  ◇ Wir defineren $\sigma_i = (\kappa_i, \zeta_i)$ als gemischte Strategie von SPi

- Der Nutzen aus einer gemischten Strategie bestimmt sich als Erwartungsnutzen

	Kopf [κ_2]	Zahl [ζ_2]
Kopf [κ_1]	–1,+1	+1,–1
Zahl [ζ_1]	+1,–1	–1,+1

- Beispiel: SP2 spielt Kopf mit Wkt $\kappa_2 = 2/3$ und Zahl mit Wkt $\zeta_2 = 1/3$
  - ◇ d.h. SP2 spielt $\sigma_2 = (2/3,\ 1/3)$
- Spielt dann SP1 Kopf, erhält SP1 den **Erwartungsnutzen**

$$u_1(K, \sigma_2) = 2/3 \cdot (-1) + 1/3 \cdot (+1) = -1/3$$

- Spielt SP1 Zahl, erhält SP1

$$u_1(Z, \sigma_2) = 2/3 \cdot (+1) + 1/3 \cdot (-1) = 1/3$$

- Spielt SP1 die gemischte Strategie $\sigma_1 = (1/5,\ 4/5)$, erhält SP1

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= 1/5 \cdot 2/3 \cdot (-1) + 1/5 \cdot 1/3 \cdot (+1) \\ &\quad +4/5 \cdot 2/3 \cdot (+1) + 4/5 \cdot 1/3 \cdot (-1) \\ &= 1/5 \end{aligned}$$

- Beachte:

$$u_1(\sigma_1, \sigma_2) = 1/5 \cdot u_1(K, \sigma_2) + 4/5 \cdot u_1(Z, \sigma_2)$$

Behauptung: Beide SP spielen $\sigma_i = (1/2,\ 1/2)$ ist ein Nash-GG!

- In der Tat: Falls $\sigma_2 = (1/2,\ 1/2)$, dann gilt für alle $\sigma_1 = (\kappa_1,\ \zeta_1)$:

$$\begin{aligned} u_1(\sigma_1, \sigma_2) &= \kappa_1 \cdot 1/2 \cdot (-1) + \kappa_1 \cdot 1/2 \cdot (+1) \\ &\quad + \zeta_1 \cdot 1/2 \cdot (+1) + \zeta_1 \cdot 1/2 \cdot (-1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- Also ist SP1 indifferent zwischen ALLEN σ_1
- Insbesondere ist $\sigma_1 = (1/2,\ 1/2)$ eine beste Antwort auf σ_2
  – Das gleiche Argument gilt für SP2
- Also ist ein Nash-GG gegeben durch: $(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = ((1/2,\ 1/2),\ (1/2,\ 1/2))$

Gemischte GGe in **2×2–Spielen**:

- In 2×2–Spielen, kann man gemischte Nash-GGe ...

  ... wie in Spielen mit stetigen Strategienmengen finden

- Denn eine gemischte Strategie entspricht ja einfach einer Zahl zwischen 0 und 1

- Also: Reaktionsfunktion ausrechnen, Schnittpunkt bestimmen

Beispiel: Battle of the Sexes

	x $[\xi)]$	y $[1-\xi]$
a $[\alpha]$	2,1	0,0
b $[1-\alpha]$	0,0	1,2

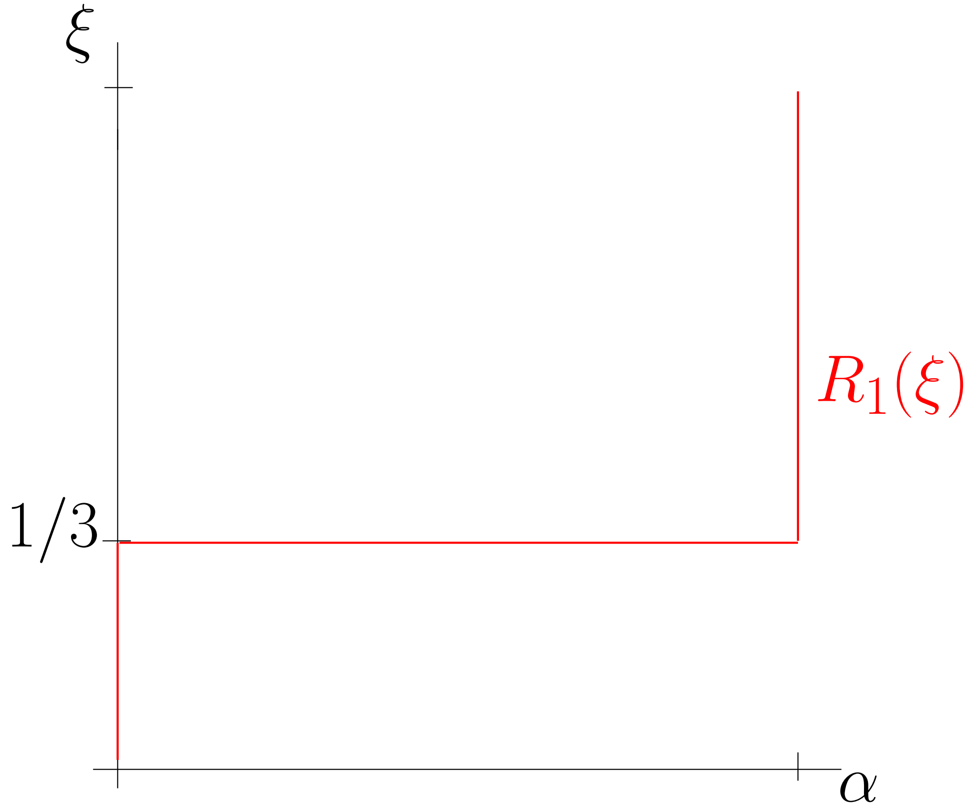
- Nimm an, SP2 spielt x mit Wkt ξ
  - was ist die beste Antwort von SP1 darauf?
- Spielt SP1 a mit Wkt α, dann:

$$
\begin{aligned}
u_1(\alpha,\xi) &= 2\cdot\alpha\xi + 1\cdot(1-\alpha)(1-\xi) \\
&= (3\xi - 1)\alpha - \xi + 1
\end{aligned}
$$

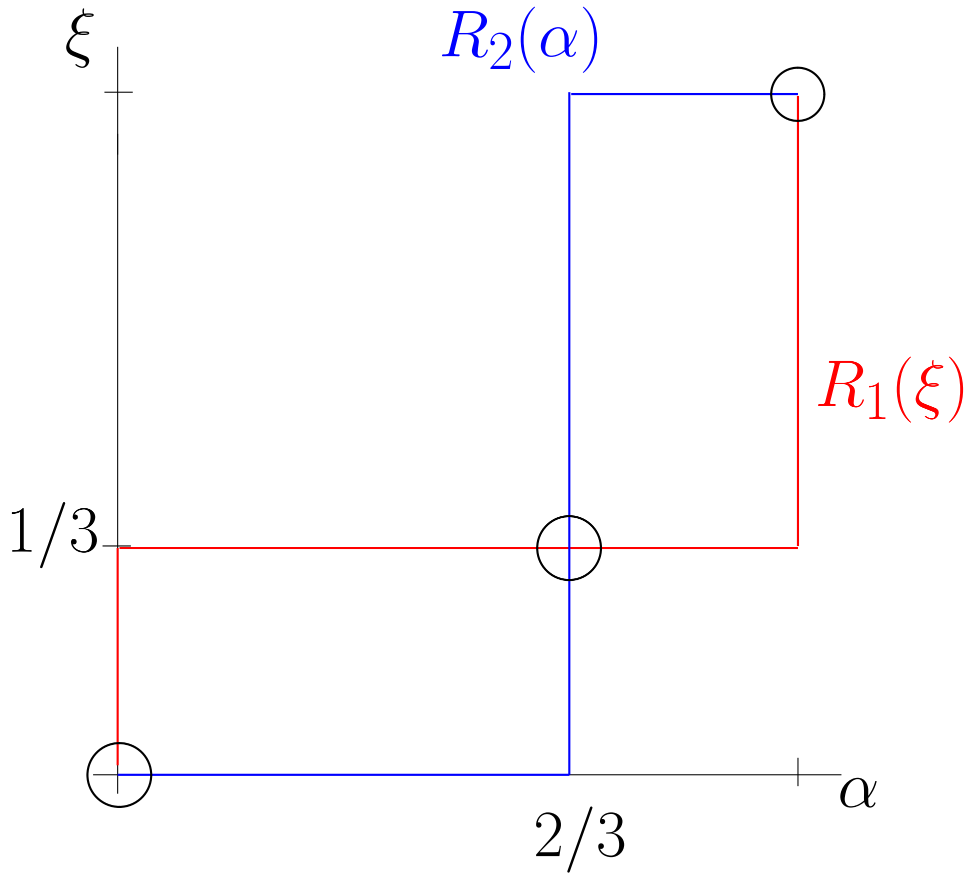
- Dies ist eine lineare Funktion in α.

$$u_1(\alpha, \xi) = (3\xi - 1)\alpha - \xi + 1$$

- Wir suchen die BA von SP1, d.h. das optimale α, gegeben ξ
  - Jetzt NICHT stupide B.e.O. ausrechnen! Scharf hingucken!
- Fall 1: $\xi < 1/3$
  - ◇ Dann $u_1(\alpha, \xi)$ strikt fallend in $\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = 0$ ist BA
- Fall 2: $\xi > 1/3$
  - ◇ Dann $u_1(\alpha, \xi)$ strikt wachsend in $\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = 1$ ist BA
- Fall 3: $\xi = 1/3$
  - ◇ Dann $u_1(\alpha, \xi)$ konstant in $\alpha \quad \Rightarrow \quad$ alle $\alpha^* \in [0, 1]$ sind BA



Und analog für SP2



Drei Nash-GG: Zwei reine: (a,x), (b,y)

und ein gemischtes: $\sigma_1^* = (2/3, 1/3)$, $\sigma_2^* = (1/3, 2/3)$

Was passiert mit mehr als zwei reinen Strategien

- Nimm an $S_1 = \{a, b, c\}$
- Neuer Strategienraum der gemischten Strategien

$$\Sigma_1 = \{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]\}$$

- Bestimmung der Reaktionsfunktionen ziemlich umständlich
- Es gibt aber eine andere Methode
- Hierzu nutzen wir die Erwartungsnutzenstruktur aus

Indifferenzbedingung

- Betrachte noch mal das gemischte GG in Battle of the Sexes
- Im GG (σ_1^*, σ_2^*) ist jeder SP indifferent zwischen seinen reinen Strategien:

$$u_1(a, \sigma_2^*) = u_1(b, \sigma_2^*) \quad \text{und} \quad u_2(\sigma_1^*, x) = u_2(\sigma_1^*, y)$$

- Dies ist kein Zufall!
- Denn falls a echt besser wäre als b: $u_1(a, \sigma_2^*) > u_1(b, \sigma_2^*)$
  - dann wäre die BA von SP1 gegen σ_2^* gleich $\alpha = 1$ und $\beta = 0$
- Denn der Erwartungsnutzen von SP1 ist eine Linearkombination aus dem Nutzen von a gegen σ_2^* und dem von b gegen σ_2^*:

$$u_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) = \alpha \cdot u_1(a, \sigma_2^*) + \beta \cdot u_1(b, \sigma_2^*)$$

Indifferenzbedingung

- Also: Solange SP1 für gegebenes σ_2 nicht indifferent ...

  ... zwischen seinen reinen Strategien ist, ...

  ... kann er sich besser stellen, indem er ...

  ... Wahrscheinlichkeitsmasse von der schlechteren

  ... auf die bessere reine Strategie umverteilt

- Damit muss er in einem (echt) gemischten GG indifferent sein

Indifferenzbedingung

Satz: (σ_1, σ_2) ist ein Nash-GG in gemischten Strategien, genau dann, wenn:

(A) Jeder Spieler ist indifferent zwischen den reinen Strategien, die er mit positiver Wkt spielt

(B) Die reinen Strategien, die ein Spieler mit Wkt 0 spielt, stellen ihn (schwach) schlechter als die reinen Strategien, die er mit positiver Wkt spielt.

Beispiel mit drei reinen Strategien für SP1

	x $[\xi)]$	y $[\theta]$
a $[\alpha]$	2,1	0,3
b $[\beta]$	0,2	3,1
c $[\gamma]$	–1,3	5,0

- Angenommen, SP2 spielt $\xi = 1/2$, $\theta = 1/2$
  - Kann dann $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 0$ ein GG sein?
- Nutzen aus a: $u_1(a, \sigma_2) = 1/2 \cdot 2 = 1$
- Nutzen aus b: $u_1(b, \sigma_2) = 1/2 \cdot 3 = 3/2$
- Also: SP1 könnte profitieren, wenn er b mit Wkt 1 spielt
  - Bedingung (A) ist verletzt

Beispiel mit drei reinen Strategien für SP1

	x $[\xi)]$	y $[\theta]$
a $[\alpha]$	2,1	0,3
b $[\beta]$	0,2	3,1
c $[\gamma]$	–1,3	5,0

- Angenommen, SP2 spielt $\xi = 3/5$, $\theta = 2/5$
  - Kann dann $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 0$ ein GG sein?
- Nutzen aus a: $u_1(a, \sigma_2) = 3/5 \cdot 2 = 6/5$
- Nutzen aus b: $u_1(b, \sigma_2) = 2/5 \cdot 3 = 6/5$
- Also: Bedingung (A) erfüllt

Beispiel mit drei reinen Strategien für SP1

ABER!

- Nutzen aus c: $u_1(c, \sigma_2) = 3/5 \cdot (-1) + 2/5 \cdot 5 = 7/5$
- Also könnte SP1 profitieren, wenn er Wkts-masse von a und b weg auf c umverteilt
  - Bedingung (B) verletzt

Konstruktive Methode

- Theoretisch gibt es mehrere mögliche GG–Konstellationen

  (a) SP1 mischt zwischen a, b, c, und SP2 mischt zwischen x, y

  d.h. $\alpha, \beta, \gamma > 0$ und $\xi, \theta > 0$

  (b) SP1 mischt zwischen a, b, und SP2 mischt zwischen x, y

  – d.h. $\alpha, \beta > 0$ und $\gamma = 0$ und $\xi, \theta > 0$

  (c) SP1 mischt zwischen a, c, und SP2 mischt zwischen x, y

  (d) und so weiter

- Um zu sehen, welche Konstellation tatsächlich ein GG ergeben kann, ...

  ... muss man Bed (A) und (B) für beide Spieler überprüfen

Konstruktive Methode

- Gibt es ein GG, in dem SP1 zw. a und c mischt, und SP 2 zw. x und y?

1. Bed. (A) für SP1: Bestimme σ_2 so, dass SP1 indifferent zw. a und c.

◇ $u_1(a, \sigma_2) = 2 \cdot \xi + 0 \cdot (1 - \xi)$

◇ $u_1(c, \sigma_2) = (-1) \cdot \xi + 5 \cdot (1 - \xi)$

◇ Gleichsetzen ergibt $\xi = 5/8$

◇ Resultierender Nutzen: $u_1 = 10/8$

2. Bed. (B) überprüfen (Abweichen zu b profitabel gegen σ_2?)

◇ $u_1(b, \sigma_2) = 0 \cdot \xi + 3 \cdot (1 - \xi) = 9/8 < 10/8$ [also (B) ok]

- Jetzt noch Bed (A) und (B) für SP2 überprüfen!

Konstruktive Methode

1. Bed. (A) für SP2: Bestimme σ_1 so, dass SP2 indifferent zw. x und y ...

.. wenn $\underline{\beta = 0}$ [wir suchen ja nach einem GG mit $\beta = 0$]

- ◇ $u_2(\sigma_1, x) = 1 \cdot \alpha + 3 \cdot (1 - \alpha)$
- ◇ $u_2(\sigma_1, y) = 3 \cdot \alpha + 0 \cdot (1 - \alpha)$
- ◇ Gleichsetzen ergibt $\alpha = 3/5$

2. Bed. (B) für SP2 überprüfen

– automatisch erfüllt, da SP2 nur zwei reine Strategien hat

- Also Nash-GG: $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*) = (3/5, 0, 2/5)$ $(\xi, \theta) = (5/8, 3/8)$
- Übung: zeige, es gibt keine weiteren

Allgemeine Definitionen

- Von nun an nennen wir S_i die Menge der reinen Strategien für SPi.
- Nimm an: k reine Strategien $S_i = \{s_{i1}, \ldots, s_{ik}\}$
- Eine gemischte Strategie σ_i ist eine Wkts-Verteilung auf S_i:

$$\sigma_i = (\sigma_{i1}, \ldots, \sigma_{ik}), \qquad \sigma_{ij} \in [0,1], \qquad \sum_j \sigma_{ij} = 1$$

  ◇ σ_{ij} ist die Wkt, mit der SPi die reine Strategie s_{ij} spielt

  ◇ Beispiel: $(\kappa_1, \zeta_1) = (1/5, 4/5)$ gemischte Strat. für SP1 in MatchPenn

  ◇ Spezialfall: $\sigma_{ij} = 1$ entspricht der reinen Strategie s_{ij}

Allgemeine Definitionen

- Menge der gemischten Strategien für Spieler i ist Σ_i
  - ◇ $\Sigma_i =$ alle Wkts-verteilungen auf S_i
  - ◇ Beispiel MatchPenn: $\Sigma_1 = \{(\kappa_1, 1 - \kappa_1) \mid k_1 \in [0, 1]\}$
- Beachte: Ein Spieler wählt nun einen $(k-1)$-dimensionalen Wkts-Vektor
  - ◇ man sagt, er "verteilt" Wkts-Masse auf seine reinen Strategien

Wahrscheinlichkeiten

- Alle wählen ihre Strategie nach wie vor unabhängig voneinander
- Also: Wenn $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$

  dann ergibt sich das reine Profil $s = (s_{1j_1}, \ldots, s_{nj_n})$ mit Wkt

$$\pi^\sigma(s) = \sigma_{1j_1} \cdots \sigma_{nj_n} = \prod_{\ell=1}^{n} \sigma_{\ell j_\ell}$$

- Beispiel: $\sigma_1 = (\kappa_1, \zeta_1) = (1/5, .4/5)$, $\quad \sigma_2 = (\kappa_2, \zeta_2) = (2/3, 1/3)$
  - ◇ $\pi^\sigma(K, K) = 1/5 \cdot 2/3$
  - ◇ $\pi^\sigma(K, Z) = 1/5 \cdot 1/3$
  - ◇ $\pi^\sigma(Z, K) = 4/5 \cdot 2/3 \qquad \pi^\sigma(Z, Z) = 4/5 \cdot 1/3$

Erweiterung des Spiels

- Unter $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ erzielt SPi den Erwartungsnutzen

$$v_i(\sigma) = \sum_{s \in S} u_i(s)\pi^{\sigma}(s)$$

- Damit ergibt sich ein neues Spiel Γ mit
  - neuen Strategienräumen Σ_i $\quad [\Sigma = \prod_i \Sigma_i]$
  - neuen Nutzenfunktionen $v_i : \Sigma \mapsto \mathbb{R}$,

$$\Gamma = (\Sigma_i, v_i(\cdot))_{i=1}^n$$

- Alle Konzepte wie "Beste Antwort" und "Nash-GG" lassen sich nun auf Γ anwenden

Allgemeine Indifferenzbedingung

- Betrachte $\sigma^* = (\sigma_1^*, \ldots, \sigma_n^*)$
- Sei S_i^* die Menge der reinen Strategien, die SPi unter σ_i^* mit strikt pos. Wkt spielt

Satz: σ^* ist ein Nash-GG genau dann, wenn gilt:

(A) SPi ist indifferent zw. allen reinen Strategien, die er mit pos. Wkt spielt:

$$v_i(s_i^*, \sigma_{-i}^*) = v_i(t_i^*, \sigma_{-i}^*) \quad \text{für alle } s_i^*, t_i^* \in S_i^*$$

(B) SPi hat keine reine Strategie, die ihn echt besser stellt:

$$v_i(s_i, \sigma_{-i}^*) \leq v_i(s_i^*, \sigma_{-i}^*) \quad \text{für alle } s_i \in S_i, s_i^* \in S_i^*$$

Zur Interpretation einer gemischten Strategie

- Buchstäbliche Interpretation:
  - Spieler können einen Zufallsgenerator programmieren ...
  - ... und überlassen dann diesem die Wahl der reinen Strategie
  - Bsp MatchPenn: Münzwurf implementiert Nash-GG
- Dies spiegelt die Idee wider, dass sich ein Spieler nicht ausrechenbar machen lassen will

Subtilere Interpretation

- Bisherige Interpretation:

  – eine Strategie s_2 ist das, was SP2 spielt

- Aber wir können eine Strategie s_2 auch interpretieren als das, ...

  ... was SP1 glaubt, das SP2 spielt

  – SP1 spielt dann eine Beste Antwort auf seine Erwartung

- Ein Nash-GG ist dann ein Zustand, ...

  –... in dem sich die Erwartungen aller Spieler erfüllen

  – Erwartungen über meinen Gegenspieler und sein tatsächliches Verhalten stimmen überein

Subtilere Interpretation

- Eine gemischte Strategie spiegelt dann die Unsicherheit darüber wider, was mein Gegenspieler tut
- Ein Nash-GG in gemischten Strategien reflektiert dann diese Unsicherheit
  - kein Spieler weiß genau, was der andere tu
  - und spielt darauf "mal dies, mal jenes"

Theoretische Fundierung (Harsanyi

- Nutzenfunktionen unterliegen zufälligen Einflüssen: $\widetilde{u}_i = u_i + \varepsilon_i$
- Jeder Spieler kann nur sein eigenes ε_i beobachten
  - dieses sogenannten permutierte Spiel ist dann ...
  - ... ein Spiel unter unvollständiger Information (später genauer)
- Harsanyi zeigt: Falls σ^* ein gemischtes GG in G ist, dann gilt:
  - im permutierten Spiel gibt es ein Nash-GG in <u>reinen</u> Strategien, ...
  - ... welches gegen σ^* konvergiert, wenn ε_i klein wird
- Also: gemischte GGe sind Ausdruck kleiner zufälliger Schocks