KAP 8: Populationsspiele

- In vielen Situationen hängt der Nutzen eines Spielers ausschließlich ...

  ... davon ab, wie viele andere Spieler eine bestimmte Aktion wählen,...

  ... aber nicht davon, wer diese Aktion wählt

  ◇ Umweltschutz, Hallenbad, Museum, Stau, Impfungen, ...

  ... Kreditkarten, Technologiestandards etc.

- Man kann solche Situationen elegant in Form ...

  ...von Populationsspielen modellieren

- Die konzeptuelle Neuerung ist, ...

  ... dass wir ein Kontinuum von Spielern betrachten

Populationsspiele

- Die Menge der Spieler ist gegeben durch $I = [0, 1]$
  - ◇ Spieler i entspricht dem Punkt i in dem Intervall $[0, 1]$
- Alle Spieler haben die gleichen zwei reinen Strategien:
  - ◇ $S_i = \{a, b\}$
- Ein Strategienprofil $s = (s_i)_{i \in I}$ ist nun eine Funktion, ...

  ... die jedem Spieler i in $I = [0, 1]$ eine Strategie a oder b zuordnet
- Bsp: Unter dem Strategienprofil

$$s = \begin{cases} a & \text{falls} \quad i \in [0, 1/3] \\ b & \text{falls} \quad i \in (1/3, 1] \end{cases}$$

spielt das "erste" Drittel der Spieler a und die letzten beiden Drittel b

Populationsspiele

- Jedes Strategienprofil s induziert ...

  ... einen Anteil α von Spielern, die a spielen ...

  ... und einen Anteil $\beta = 1 - \alpha$ von Spielern, die b spielen.

- Im obigen Beispiel: $\alpha = 1/3, \quad \beta = 2/3$

- Annahme: Der Nutzen eines Spielers hängt nur von α und β ab:

$$u_i(s_i, s_{-i}) = u_i(s_i, \alpha, \beta)$$

  (Da $\beta = 1 - \alpha$, kann man das β in u_i auch weglassen)

- Witz: α ist unabhängig davon, ob ein bestimmter SPi a oder b spielt!

Populationsspiel: Snob- und Modegüter

- Es gibt ein Gut, das zu einem exogenen Preis von $p = 1$ angeboten wird

- Spieler i kann das Gut konsumieren $\longrightarrow \quad s_i = a$ ...

  ... oder es nicht konsumieren $\longrightarrow \quad s_i = b$

- Der Nutzen aus b ist auf Null normiert

- Wenn α Spieler a konsumieren, sei der Nutzen für SPi:

$$u_i(a, \alpha) = v + z\alpha - p$$

  - ◇ $v =$ "Basisnutzen" aus a
  - ◇ $z < 0 \longrightarrow$ Snobgut
  - ◇ $z > 0 \longrightarrow$ Modegut

Snobgut

- Betrachte den Fall $v = 2$, $z = -3$: $\quad u_i(a, \alpha) = 1 - 3\alpha$
- Behauptung 1: Jedes Strategienprofil mit $\alpha = 1/3$ ist ein Nash-GG
  - ◇ Denn: gegeben $\alpha = 1/3$: Nutzen aus b ist 0
  - ◇ Nutzen aus a ist $1 - 3\alpha = 0$
  - ◇ Also: niemand kann profitabel abweichen
- Behauptung 2: Kein anderes Strategienprofil ist Nash-GG
  - ◇ Denn: gegeben $\alpha < 1/3$: Nutzen aus a ist $1 - 3\alpha > 0$
  - ◇ Also: ein Spieler, der b spielt kann profitabel zu a abweichen
  - ◇ Für $\alpha > 1/3$: Profitable Abweichung von a zu b.

Modegut

- Betrachte den Fall $v = -1$, $z = +5$: $\quad u_i(a, \alpha) = -2 + 5\alpha$
- Behauptung 1: Jedes Strategienprofil mit $\alpha = 2/5$ ist ein Nash-GG
  - ◇ Denn: gegeben $\alpha = 2/5$: Nutzen aus b ist 0
  - ◇ Nutzen aus a ist $-2 + 5\alpha = 0$
  - ◇ Also: niemand kann profitabel abweichen
- Behauptung 2: Ausserdem sind die Strategienprofile mit

  $\alpha = 1$ und $\alpha = 0$ Nash-GGe
  - ◇ Denn: $\alpha = 1 \longrightarrow$ Nutzen aus a ist $3 \longrightarrow$ keine profitable Abw. zu b
  - ◇ Denn: $\alpha = 0 \longrightarrow$ Nutzen aus a ist $-2 \longrightarrow$ keine profitable Abw. zu a

Nash-GGe in allgemeinen Populationsspielen

- Wir nehmen an, dass die Spieler alle den gleichen Nutzen haben:

  $$u_i(s_i, \alpha) = u(s_i, \alpha) \text{ für alle } i$$

- Dann gibt es drei mögliche Konstellationen für ein Nash-GG:

  1. Ein Profil s^* mit $0 < \alpha^* < 1$ ist ein Nash-GG, wenn

     $$u(a, \alpha^*) = u(b, \alpha^*)$$

  2. Ein Profil s^* mit $\alpha^* = 1$ ist ein Nash-GG, wenn

     $$u(a, 1) \geq u(b, 1)$$

  3. Ein Profil s^* mit $\alpha^* = 0$ ist ein Nash-GG, wenn

     $$u(a, 0) \leq u(b, 0)$$

Gemischte Nash-GGe und Populationsspiele

- Populationsspiele haben viele interessante Anwendungen ...

  ... aber sie gestatten auch eine neue Interpretation gemischter Strategien

- Betrachte eine Population $I = [0, 1]$ ...

  ... und ein Spiel G mit 2 Spielern, Strategien a und b, Nutzen u

- Betrachte die folgende Sequenz:

  1. Jeder Spieler $i \in I$ legt sich auf eine Aktion a oder b fest
  2. Die Spieler werden zufällig gepaart
  3. Jedes Paar spielt G gemäß der in 1. gewählten Aktionen

Gemischte Nash-GGe und Populationsspiele

- Diese Ereignisfolge induziert ein Populationsspiel, mit den Nutzen

$$\tilde{u}(a, \alpha) = \alpha \cdot u(a, a) + (1 - \alpha) u(a, b),$$

$$\tilde{u}(b, \alpha) = \alpha \cdot u(b, a) + (1 - \alpha) u(b, b)$$

- Behauptung: Betrachte ein (symmetrisches) Nash-GG (σ_1, σ_2) von G mit $\sigma_1 = \sigma_2 = (\alpha^*, \beta^*)$.

  ◇ Dann gibt es ein Nash–GG s^* des Populationsspieles, so dass ...

  ... in diesem GG ein Anteil α^* von Spielern a spielt ....

  ... und ein Anteil β^* von Spielern b.

- Jedem Nash-GG in gemischten Strategien von G entspricht ein Nash-GG in <u>reinen</u> Strategien des zugehörigen Populationsspiels

KAP 9. Nash-GG und soziales Optimum

- Ein strategisches Spiel erfasst eine Situation, ...
  - ◇ ... in der die Spieler dezentral interagieren
  - ◇ ... d.h. es gibt niemanden, der den Spielern vorschreiben kann, ...

    ... was sie tun sollen
- Klassische Frage: ist das, was dabei rauskommt, gut oder schlecht?
- Wenn es einen “wohlmeinenden Diktator” gäbe, ...
  - ◇ ... der den Spielern bestimmte Strategien befehlen könnte?
  - ◇ Was würde er verordnen?

Nash-GG und soziales Optimum

- Wir wissen: Auf Wettbewerbsmärkten ohne strategische Interaktion ...
  - ◇ ... führt dezentrale Organisation via Angebot und Nachfrage ...

    ... zum sozialen Optimum
  - ◇ Erster Hauptsatz der Wohlfahrtstheorie
- Hatten schon gesehen: bereits im Prisoner's dilemma nicht der Fall
- Werden uns das jetzt ein bisschen genauer überlegen

Das soziale Optimum

- Sei $G = \{(S_i, u_i)_{i=1}^n\}$ ein Spiel mit stetigen Strategienräumen
- Nimm an, Nutzen ist transferierbar (z.B. durch Geld)
- Die soziale Wohlfahrt aus einem Profil $s \in S$ ist definiert als

$$U(s) = \sum_{j=1}^{n} u_j(s)$$

- Das soziale Optimum ist definiert als ein Maximierer von U:

$$\widehat{s} = \arg\max_{s \in S} U(s)$$

- Idee: ein sozialer Planer würde $\widehat{s}$ verordnen

Vergleich B.e.O: Nash versus soziales Optimum

- B.e.O. für das soziale Optimum $\widehat{s}$: Für alle i

$$\frac{\partial U(\widehat{s})}{\partial s_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u_j(\widehat{s})}{\partial s_i} = 0$$

- B.e.O. für ein Nash-GG s^*: Für alle i

$$\frac{\partial u_i(s^*)}{\partial s_i} = 0$$

- Offenbar: Bedingungen sind sehr verschieden

- Also: im allgemeinen ist das Nash-GG <u>nicht</u> sozial optimal

Das Allmendeproblem (Hardin, 1968)

- Eine Gruppe von n Fischern bewirtschaftet einen gemeinsamen Teich
- Jeder Fischer i wählt eine Anzahl $b_i \in S_i = [0, \infty)$ von Booten
- Das Aussenden von b_i Booten kostet cb_i, $\quad c > 0$
- Sei $\quad B = b_1 + \ldots + b_n \quad$ die Anzahl aller ausgesandten Boote
- Der Ertrag pro Boot bei insgesamt B Booten ist $\quad v(B)$
- v ist fallend und konkav in B, also: $v' < 0, v'' < 0$

Das Allmendeproblem

- Also: $u_i(b_i, b_{-i}) = b_i v(B) - c b_i$ Soz.Wf.: $U(b) = Bv(B) - cB$
- Soziales Grenzprodukt von b_i: [Produktregel]

$$\frac{\partial}{\partial b_i} Bv(B) = v(b_1 + \ldots + b_n) + (b_1 + \ldots + b_n) \cdot v'(b_1 + \ldots + b_n)$$

- Individuelles Grenzprodukt von b_i:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} b_i v(B) = v(b_1 + \ldots + b_n) + b_i \cdot v'(b_1 + \ldots + b_n)$$

- Beachte: $v' < 0 \Rightarrow$ individuelles Grenzprodukt höher

Das Allmendeproblem

- BeO für soz. Opt.: Soziales Grenzprodukt = Grenzkosten von b_i = c
- BeO für Nash: Individuelles Grenzprodukt = Grenzkosten von b_i = c
- Berechnung unter der Symmetrieannahme: $b_1 = \ldots = b_n = B/n$
- BeO für soz. Opt: $$v(\widehat{B}) + \widehat{B} \cdot v'(\widehat{B}) = c \qquad (1)$$
- BeO für Nash-GG: $$v(B^*) + (B^*/n) \cdot v'(B^*) = c \qquad (2)$$
- Beachte: $v' < 0, v'' < 0 \Rightarrow$ Linke Seiten von (1) und (2) fallen in B
- Da $v' < 0$: Linke Seite von (2) oberhalb der von (1)
  - Also $B^* > \widehat{B}$
- Im Nash-GG werden aus sozialer Sicht zu viele Boote entsandt

Das Allmendeproblem

- Grund: i sendet so lange Boote aus wie sein Ertrag aus einem zusätzlichen Boot über dessen zusätzlichen Kosten liegt
- Er bezieht den sozialen Grenzertrag seiner Aktion nicht mit ein
  - ◇ er internalisiert nicht, dass sein zusätzliches Boot ...

    ... den Grenzertrag der anderen Boote reduziert
  - ◇ Negative Externalität
- Aus sozialer Sicht also zu viele Boote (Ressourcenübernutzung)
- Mögliche Lösung: Eigentumsrechte festlegen, Fischgebühr verlangen

Das Allmendeproblem als Populationsspiel

- Wir können das Allmendeproblem auch als Populationsspiel formulieren
- Betrachte nun ein Kontinuum $I = [0, 1]$ von Fischern.
- Jeder Fischer hat zwei Aktionen
  - ◇ $s_i = 0$: Kein Boot aussenden $\longrightarrow$ Nutzen $= 0$
  - ◇ $s_i = 1$: Boot aussenden $\longrightarrow$ Nutzen $= v(\beta) - c$
  - ◇ $v(\beta)$ = Ertrag für Fischer i, wenn ein Anteil β von Fischern Boote aussendet

Das Allmendeproblem als Populationsspiel

- Soziale Wohlfahrt, wenn ein Anteil β Boote sendet:

$$U(\beta) = \beta v(\beta) - \beta c$$

- B.e.O. für sozial optimales $\widehat{\beta}$: $\quad \widehat{\beta} v'(\widehat{\beta}) + v(\widehat{\beta}) - c = 0$
- Im Nash–GG β^*: $\quad v(\beta^*) = c$

  (Leicht zu sehen: es gibt keine anderen)
- Beachte: Formeln entsprechen genau den Formeln im ersten Allmendeproblem, wenn $n \to \infty$
- Also: $\beta^* > \widehat{\beta}$, d.h. Überfischung im Nash–GG

Wettkämpfe

- Gruppe von n Spielern streitet um einen "Preis" in Höhe von $V > 1$
- Jeder Spieler wählt eine Anstrengung $s_i \in S_i = [0, \infty)$
- Dafür muss jeder Spieler Kosten $c(s_i)$ aufwenden
- Die Gewinnwahrscheinlichkeit von Spieler i ist $p_i(s_i, s_{-i})$
- Konkret betrachten wir den sog. Tullock-Wettkampf

$$p_i(s_i, s_{-i}) = \frac{s_i}{s_1 + \ldots + s_n}$$

mit linearen Kosten $c(s_i) = s_i$ $\qquad [\,\frac{0}{0} = 1/n]$

- Beachte: s_i erhöht die eigene Siegchance und reduziert die der Gegner

Wettkämpfe

- Beispiele
  - Patentrennen
  - Vergabe von Gebietsmonopolen (Strom, Wasser, etc)
  - Lobbying, Bestechung
  - Bewerbungen: Jobs, Stipendien, Forschungsgelder, Architekturwettb.
  - Sportwettkämpfe
  - Kampf um Positionen in Unternehmen
  - Kriege

Tullock-Wettkampf: soziales Optimum

- Soziale Wohlfahrt

$$U(s) = V - (s_1 + \ldots + s_n)$$

  ◇ Beachte: Gewinnwahrscheinlichkeiten summieren sich zu 1

- Damit: Soziales Optimum: $\hat{s} = 0$

- Aus sozialer Sicht sind die Wettkampfaufwendungen ...

  ... reine Verschwendung, denn sie vergrössern den Gesamtkuchen nicht

- Dies ist eine Extremannahme, die man abschwächen kann,...

  ... die aber die Grundlogik am klarsten macht

Tullock-Wettkampf: Nash-GG

- Nutzen für Spieler i: $u_i(s_i, s_{-i}) = V \cdot s_i/(s_1 + \ldots + s_n) - s_i$
- BeO für Nash-GG (Quotientenregel)

$$V \cdot \frac{s_1 + \ldots s_{i-1} + s_{i+1} + \ldots + s_n}{(s_1 + \ldots + s_n)^2} - 1 = 0$$

- Symmetrie: $s_i = s$ für alle i

$$V \cdot \frac{(n-1) \cdot s}{(n \cdot s)^2} - 1 = 0$$

- Also: $s_i^* = V \cdot (n-1)/n^2$ ist Nash

Tullock-Wettkampf: Intuition

- Also: Wettkampf führt zu sozial exzessiven Aufwendungen
- Grund
  - ◇ Der soziale Ertrag einer zusätzlichen Aufwandseinheit ist Null
  - ◇ Aber bei kleinen Aufwendungsniveus liegt der private Ertrag ...

    ... einer zusätzlichen Aufwandseinheit über deren Kosten
- Im Extremfall von $s_{-i} = 0$
  - ◇ Eine zusätzliche Aufwendungseinheit kostet i nichts, ...

    ... erhöht aber seine Siegschance von $1/n$ auf 1!

Wettkämpfe als Anreizinstrumente

- Häufig will man aber gerade, dass die Spieler sich anstrengen
  - ◇ Forschung und Entwicklung, Arbeiter, Studium, etc.
- Deshalb werden Wettkämpfe häufig als <u>Anreizinstrumente</u> verwendet
  - ◇ "relative performance pay"
- Wenn Anstrengung der Spieler sozial wünschenswert ist, ...

  ... dann muss man aber die soziale Wohlfahrt anders definieren
  - ◇ z.B. Wohlfahrt = Summe der Aufwendungen
- Das heisst nicht, dass Wettkämpfe <u>optimale</u> Anreizinstrumente sind
  - ◇ Muss man genauer untersuchen: Mechanism Design

Das Teamproblem

- Eine Gruppe von n Spielern erwirtschaftet gemeinsam einen Output
- Jeder Spieler i wählt eine "Investition" $s_i \in S_i = [0, \infty)$
- Dafür muss er Kosten $c(s_i)$ aufwenden
- Daraus ensteht der Output $y = f(s_1, \ldots, s_n)$, ...

  ... der gleichmässig unter den Spielern geteilt wird
- (Sei f steigend in s_i und konkav, c steigend und konvex)
- Also: $u_i(s_i, s_{-i}) = \frac{1}{n} f(s_1, \ldots, s_n) - c(s_i)$
- Soziale Wohlfahrt: $U(s) = f(s_1, \ldots, s_n) - \sum_i c(s_i)$

Das Teamproblem

- B.e.O. für soziales Optimum

$$\frac{\partial f(s)}{\partial s_i} - c'(s_i) = 0$$

  - ◇ Soziales Grenzprodukt von Input s_i gleich Grenzkosten von s_i

- B.e.O. für Nash-GG:

$$\frac{1}{n}\frac{\partial f(s)}{\partial s_i} - c'(s_i) = 0$$

  - ◇ Individuelles Grenzprodukt von Input s_i gleich Grenzkosten von s_i

- Beachte: individuelles Grenzprodukt geringer

Das Teamproblem: Beispiel

- $f(s_1, \ldots, s_n) = s_1 + ... + s_n + g \cdot s_1 \cdot ... \cdot s_n, \quad c(s_i) = (1/2)s_i^2$
- BeO für soz. Optimum: $\quad 1 - g \prod_{j \neq i} s_j - s_i = 0$
- BeO für Nash-GG: $\quad 1/n[1 - g \prod_{j \neq i} s_j] - s_i = 0$
- Also: zu geringe individuelle Beiträge im Nash-GG
- Grund: i investiert so lange wie <u>sein</u> Ertrag aus einer ...

  ... zusätzlichen Investitionseinheit über deren zusätzlichen Kosten liegt
- Aus sozialer Sicht sollte i so lange investieren, wie der <u>soziale</u> Ertrag ...

  ... aus einer zusätzlichen Investitionseinheit über deren zusätzlichen Kosten liegt

Das Teamproblem

- i bekommt aber nur ein n-tel des Produkt seiner Investition zurück, ...

  ... der Rest geht an die anderen Spieler

  ◇ Investieren ist öffentl. Gut

  ◇ (Spieler i übt eine positive Externalität aus)

- Daher ist der private Ertrag einer zusätzlichen Investitionseinheit ...

  geringer als deren sozialer Ertrag

- Also wird im Nash-GG aus sozialer Sicht zu wenig investiert