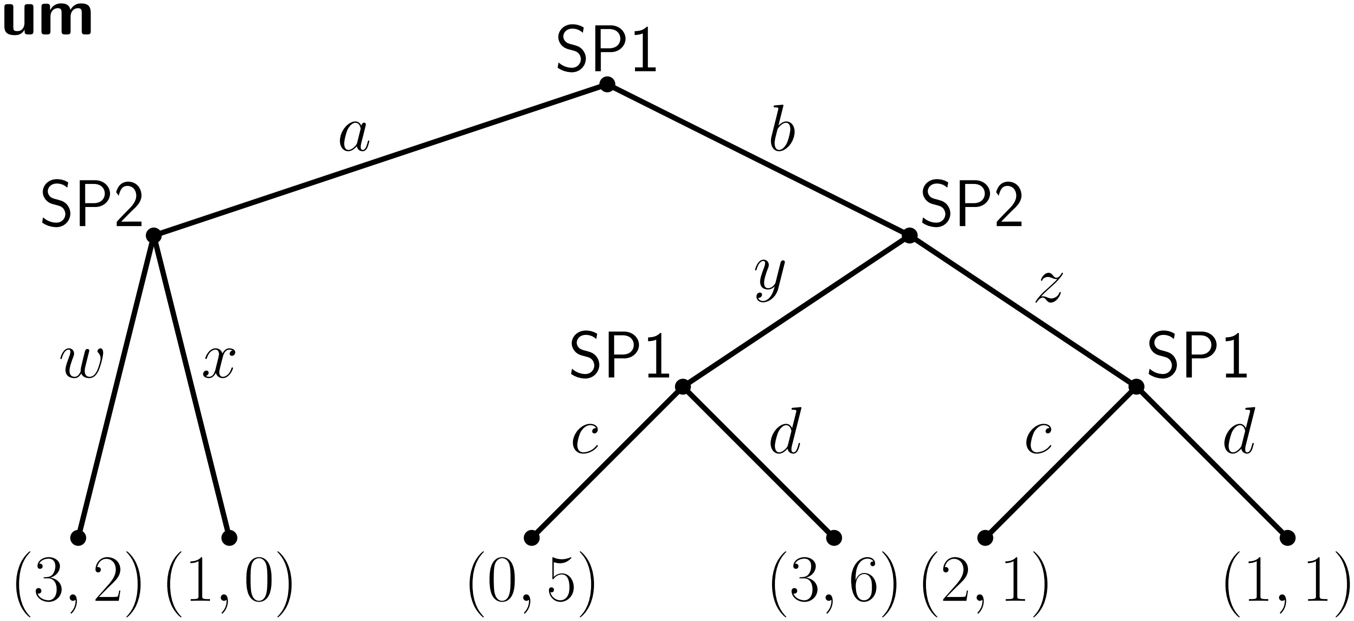
KAP 11. Dynamische Spiele

- Bisher: alle Spieler ziehen simultan
  - bzw. können Aktionen der Gegenspieler nicht beobachten
- Nun: Dynamische Spiele
  - Spieler können nacheinander ziehen
  - bzw. die Entscheidungen anderer Spieler (teilweise) beobachten
- Erweitert das Analysespektrum erheblich
- Wieder zwei Teile
  - Beschreibung des Spiels (extensive Form)
  - Lösungskonzept(e)

Ein Spielbaum



- Zuerst wählt SP1 zwischen a und b
- Wenn SP1 a gewählt hat, wählt SP2 zwischen w und x etc.
- Die Aktionsfolge (b, y, d) ergibt den Nutzen 3 für SP1 und 6 für SP2

etc.

Bezeichnungen

- Der Punkt an dem ein Spieler wählt heisst (Entscheidungs) Knoten
- Der erste Knoten heisst Anfangsknoten oder Wurzel (root)
- Verbindungen zwischen Knoten heissen Zweige
- Jedem Zweig ist eine Aktion zugeordnet
- Die Knoten am Ende heissen Endknoten
- Jedem Endknoten ist ein Nutzenprofil zugeordnet ...

  ... das den Nutzen jedes Spielers beschreibt,

  ... wenn das Spiel an diesem Knoten endet

Information

Ein Spiel, in dem alle SP alle vorherigen Züge beobachten können, heisst

Spiel unter vollkommener Information

Ein Spiel, in dem mindestens ein SP nicht alle vorherigen Züge beobachten kann, heisst

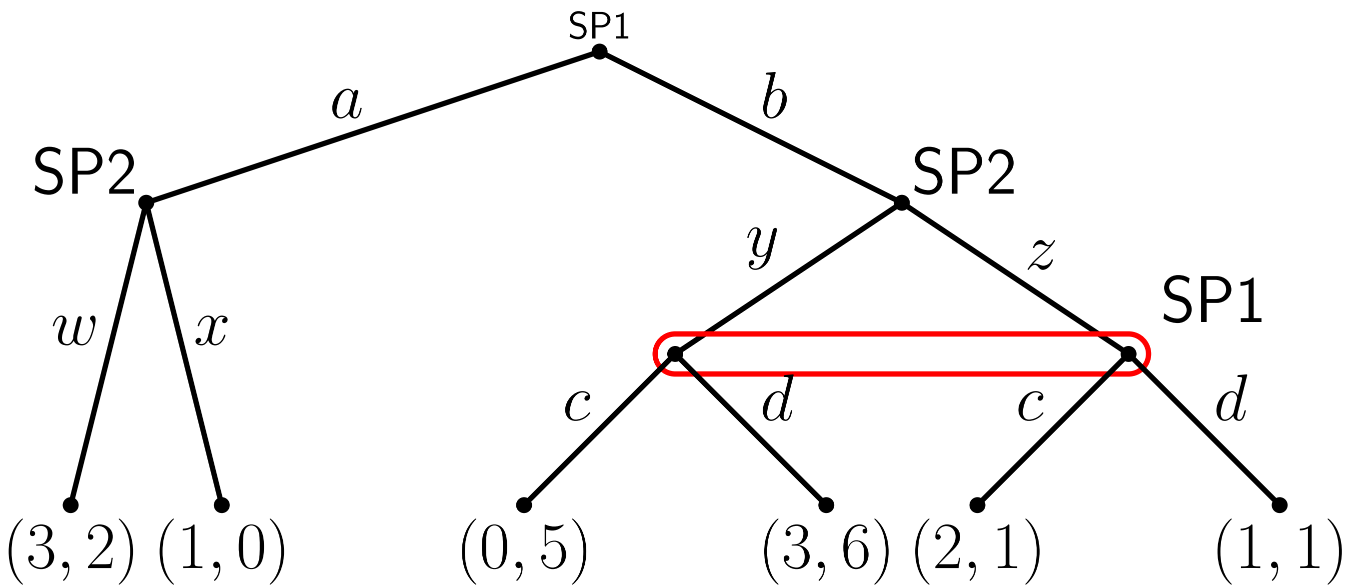
Spiel unter unvollkommener Information

Was ein Spieler beobachten kann, kennzeichen wir durch

Informationsmengen

Eine Informationsmenge enthält die Knoten, die ein SP NICHT voneinander unterscheiden kann

Ein Spiel unter UNvollkommener Information

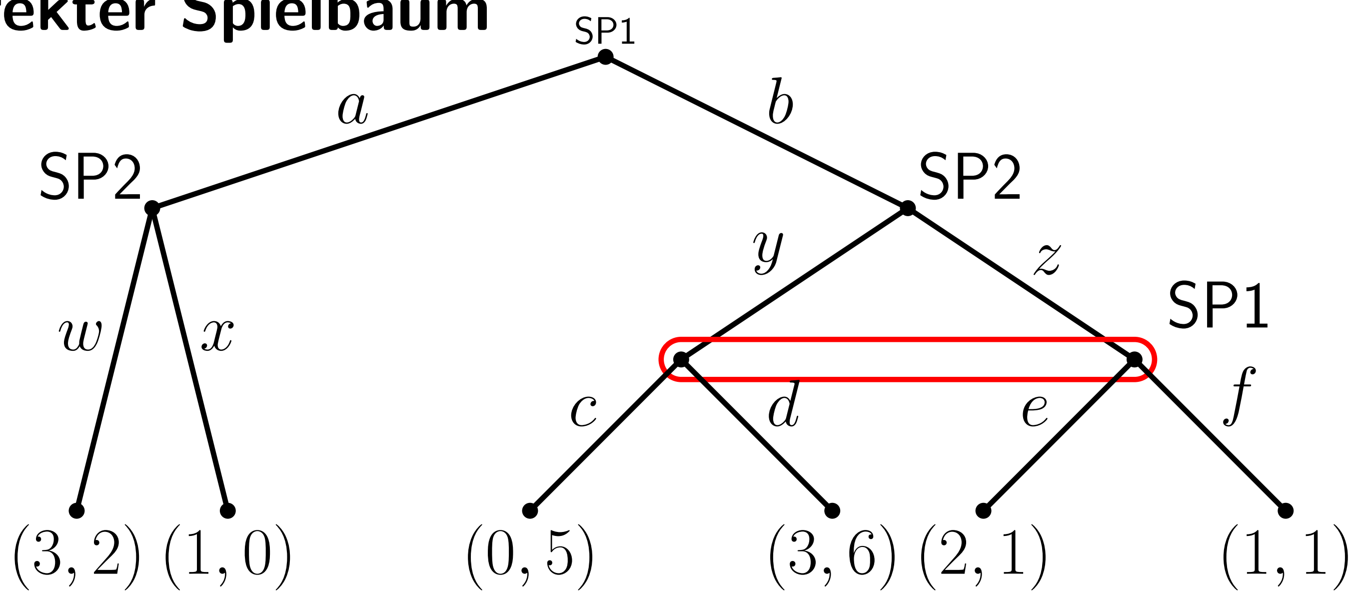


- Die rote Informationsmenge für SP1 enthält zwei Knoten:
  - SP1 kann nicht beobachten, ob SP2 y oder z gewählt hat
  - d.h. SP1 weiss nicht, an welchem Knoten er sich befindet
- Eine Info-menge wird mit dem zugehörigen SP gekennzeichnet
  - nicht der einzelne Knoten in der Informationsmenge

Spiele unter vollkommener und unvollkommener Information

- Ein Spiel unter **vollkommener** Information ist also ein Spiel
  - in dem jede Informationsmenge <u>genau</u> einen Knoten enthält
  - das Eingangsbeispiel ist ein Spiel unter vollkommener Information
- Im folgenden nehmen wir an, dass ein Spieler ...
  - ... seine möglichen Aktionen kennt
- Also müssen von jedem Knoten innerhalb einer Informationsmenge ...
  - ... die gleichen Aktionen abzweigen!

Ein UNkorrekter Spielbaum

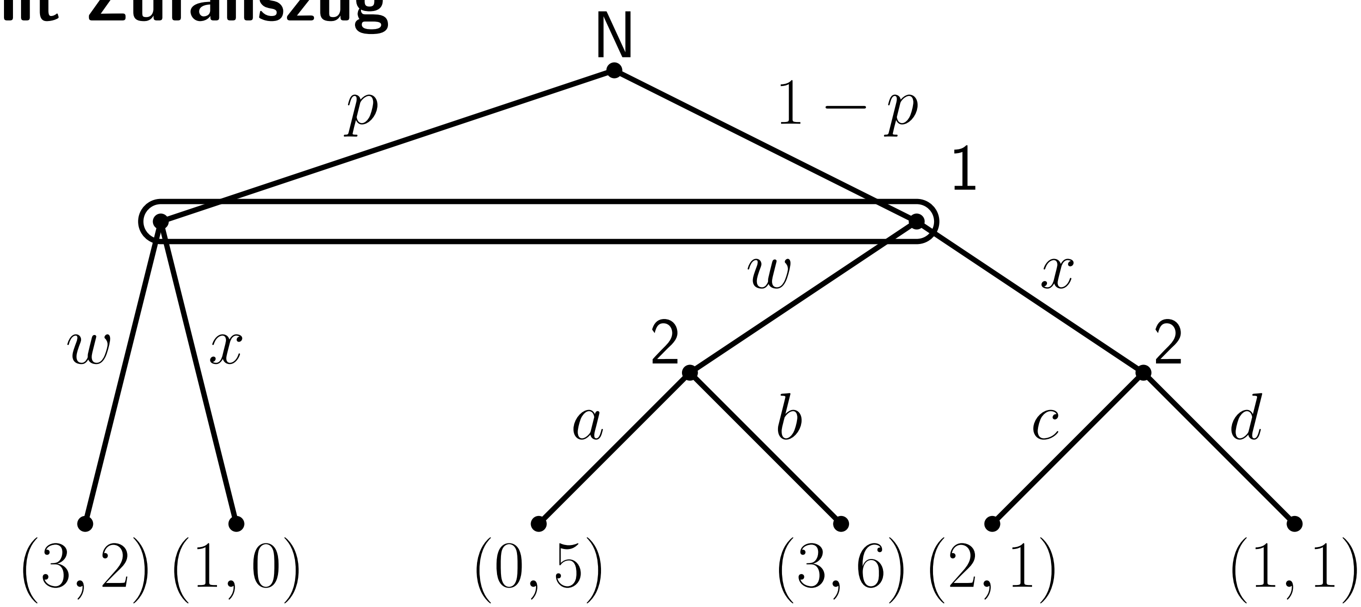


- Seien c und e sowie d und f je unterschiedliche Aktionen
- Wir nehmen an, dass SP1 weiss, ...
  - ... ob er zwischen c und d ...
  - ... oder zwischen e und f wählen muss
- Also weiss er, an welchem Knoten er sich befindet
  - Also ist die Informationsmenge <u>nicht</u> korrekt

Spiele mit Zufallszügen

- Viele dynamische Spiele unterliegen zufälligen Einflüssen
  - Poker, Würfelspiele ...
- Solche exogene Unsicherheit kann man durch einen zusätzlichen Spieler darstellen
- Diesen Spieler nennt man Natur
  - Natur wählt ihre Aktionen mit exogen gegebener Wahrscheinlichkeit
  - Oft zieht Natur am Anfangsknoten (aber nicht immer)

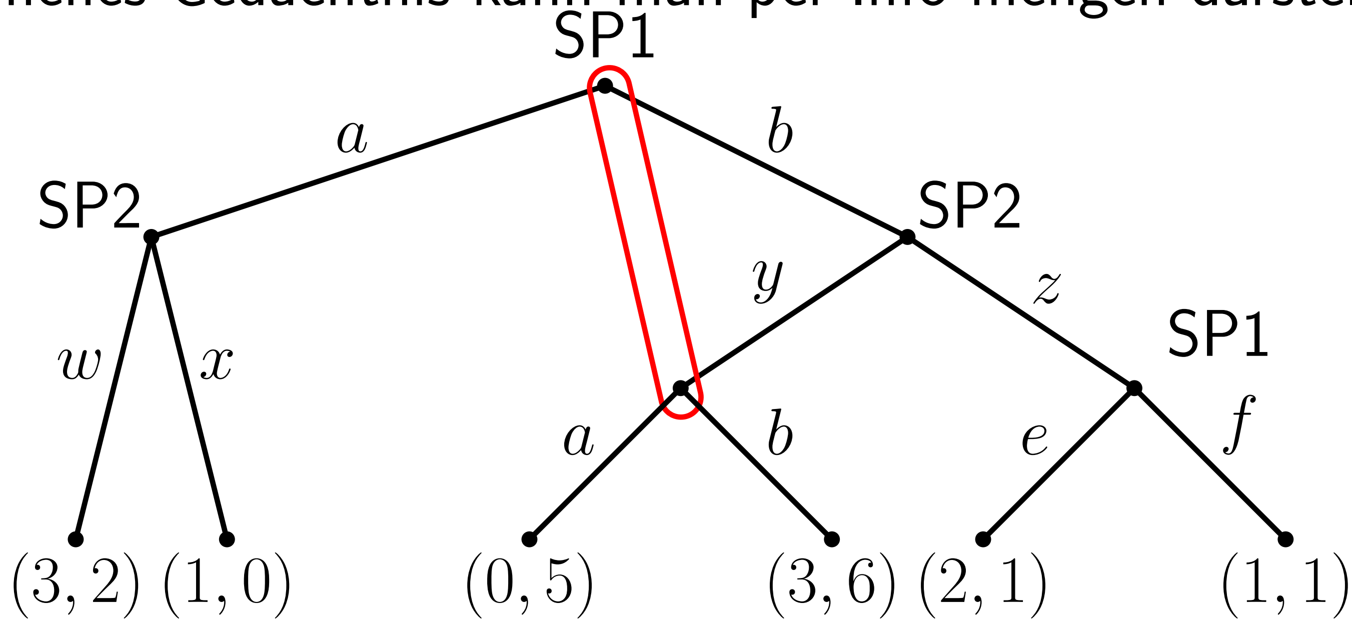
Ein Spiel mit Zufallszug



- Natur wählt “links” mit Wahrscheinlichkeit p ...
  - ... und “rechts” mit Wahrscheinlichkeit $1-p$
- SP1 kann den Zug von Natur nicht beobachten
  - aber SP2 kann

Spiele mit vollkommenem Gedächtnis

- Wir nehmen an, dass sich jeder SP an alle vorherigen Züge erinnert
  - Alle SP haben vollkommenes Gedächtnis
- Unvollkommenes Gedächtnis kann man per Info-mengen darstellen



- SP1 weiss nicht, ob er schon gezogen hat oder nicht!

(werden wir nicht behandeln)

Definition: Spielbaum

Ein Spielbaum ist eine Menge von Knoten und Zweigen mit den Eigenschaften:

- es gibt genau einen Anfangsknoten
- jeder Zweig verbindet genau zwei Knoten
- jeder Knoten hat genau einen Vorgängerknoten (keine geschlossenen Pfade)
- jeder Pfad von Zweigen endet an einem Endknoten

Definition: Ein Spiel in <u>extensiver Form</u> (ohne Zufallszüge) umfasst

- eine Menge von Spielern
- einen Spielbaum
- eine Funktion, die jedem Knoten einen Spieler zuordnet
- eine Funktion, die jedem Zweig eine Aktion zuordnet
- für jeden SP eine Zusammenfassung seiner Knoten in Info-mengen:
  - jedem Knoten in einer Info-menge folgt die gleiche Menge möglicher Aktionen
- für jeden Spieler eine Nutzenfunktion, die jedem Endknoten eine Zahl zuordnet

Definition: Ein Spiel in extensiver Form mit Zufallszügen ist ein Spiel in extensiver Form mit der Eigenschaft:

- es gibt einen zusätzlichen Spieler (Natur)
- Natur hat keine Nutzenfunktion
- die Züge von Natur erfolgen mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung über die am entsprechenden Knoten verfügbaren Aktionen

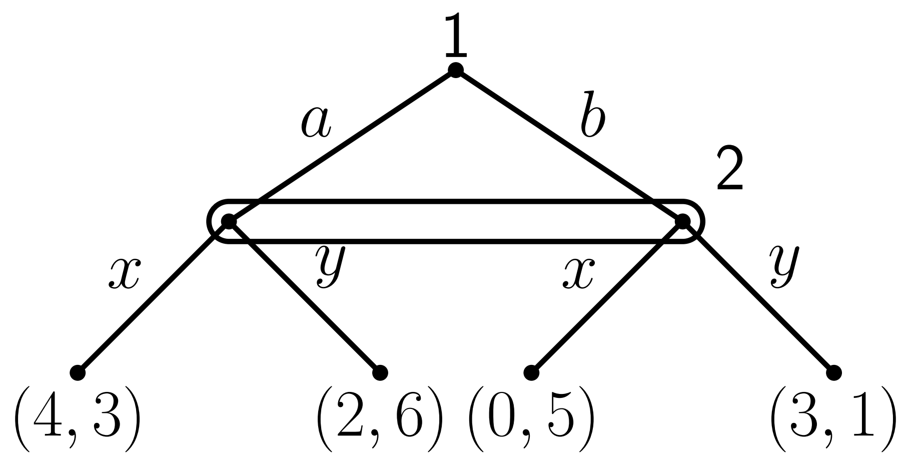
Definition Ein Spiel in extensiver Form heisst endlich, falls die Menge der Spieler und Aktionen endlich ist

(Andernfalls heisst es unendlich.)

Normalform und extensive Form

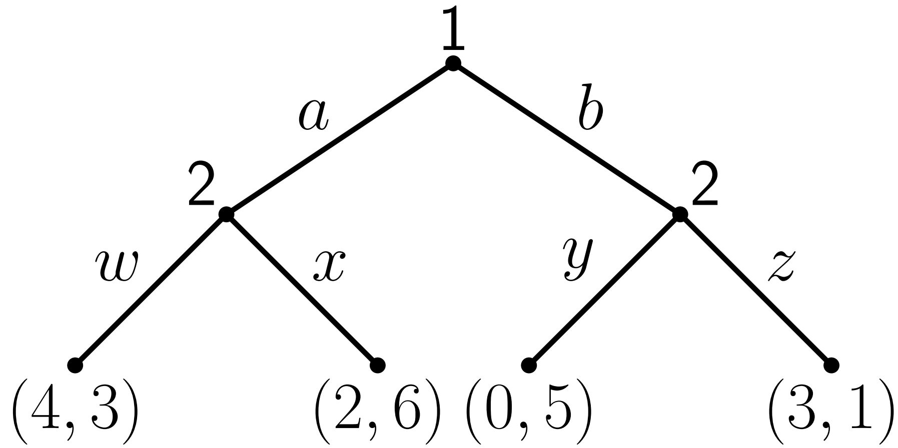
- Jede Normalform kann in extensiver Form dargestellt werden:

	x	y
a	4,3	2,6
b	0,5	3,1



- SP2 kann den Zug von SP1 nicht beobachten
  - Also: Simultanes Spiel entspricht Spiel unter unvollkommener Info
- Kann man auch extensive Spiele als Normalformen darstellen?
  - Dafür brauchen wir den Begriff der **Strategie**

Strategien in extensiven Spielen: Motivation



- Betrachte SP1 – was sollte er tun?

  – wie stets hängt dies von seinen Erwartungen über SP2s Verhalten ab!

- Das Neue im dynamischen Spiel ist, dass SP2 sein Verhalten ...

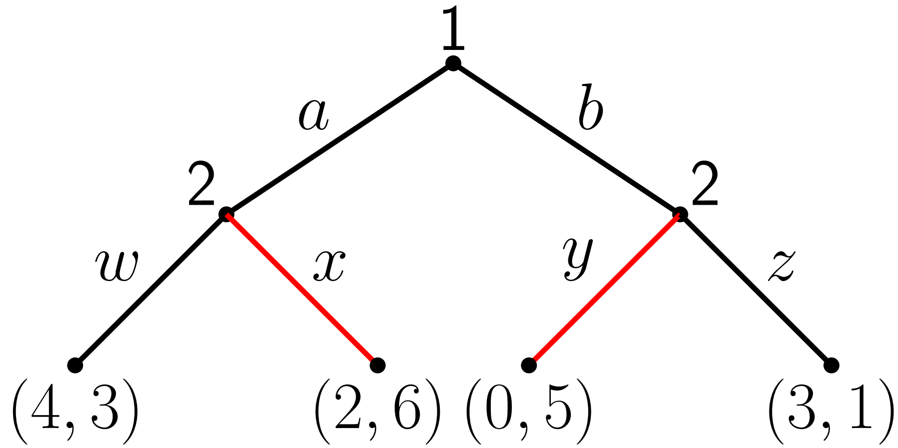
  ... nun darauf <u>konditionieren</u> kann, was SP1 tut

- SP1 muss sich also fragen: Was macht SP2,

  – ... **WENN** ich a spiele, und was

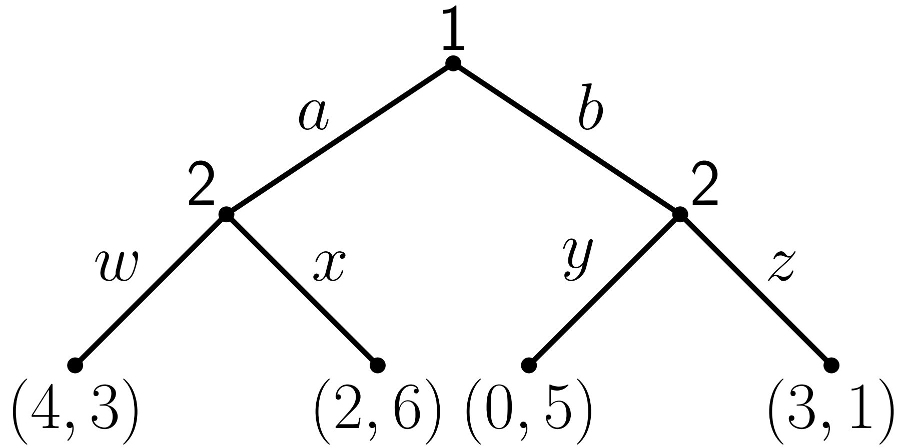
  – ... **WENN** ich b spiele

Strategien in extensiven Spielen: Motivation



- Angenommen, SP1 glaubt, dass SP2 ...
  - ... an seinem linken Knoten x spielt
  - ... und an seinem rechten Knoten y
- Dann bekommt SP1 ...
  - ◇ ... 2, wenn er a spielt [Nutzen aus dem Pfad (a, x)]
  - ◇ ... 0, wenn er b spielt [Nutzen aus dem Pfad (b, y)]
- Also sollte SP1 a spielen

Strategien in extensiven Spielen: Motivation



- D.h. SP1 kann seine beste Antwort gegen SP2 nur dann bestimmen,
  - ... wenn das Verhalten von SP2 an ...
  - ... <u>allen</u> seinen Entscheidungsknoten spezifiziert ist
- Eine Strategie wird daher definiert als ein <u>vollständiger</u> Aktionsplan

Strategien in extensiven Spielen: Definition

Eine Strategie für Spieler i in einem extensiven Spiel spezifiziert für jede Informationsmenge von Spieler i eine an dieser Informationsmenge verfügbare Aktion

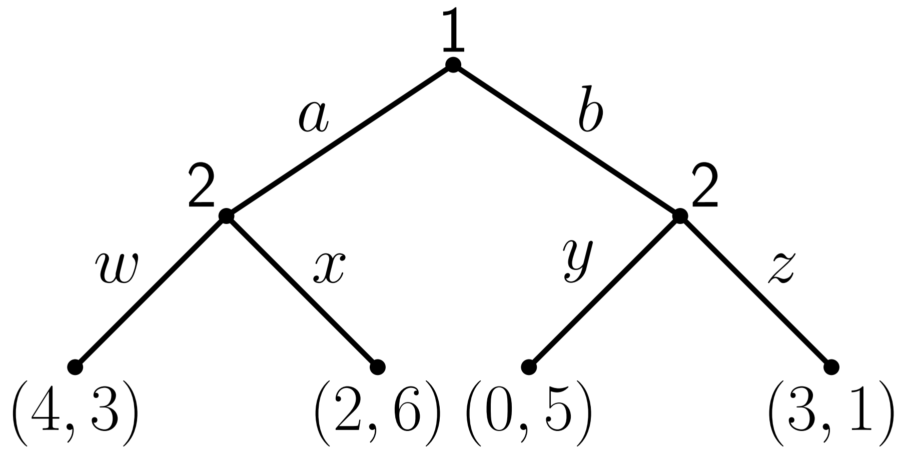
[gemischte Strategien später]

Man kann eine Strategie so intepretieren

– ein Spieler legt vor dem Spiel seine Aktionen für alle Info-mengen fest

– die Ausführung der Strategie überlässt er dann einem Computer

Beispiel:



- SP1 hat zwei Strategien: a und b
- SP2 hat vier Strategien:

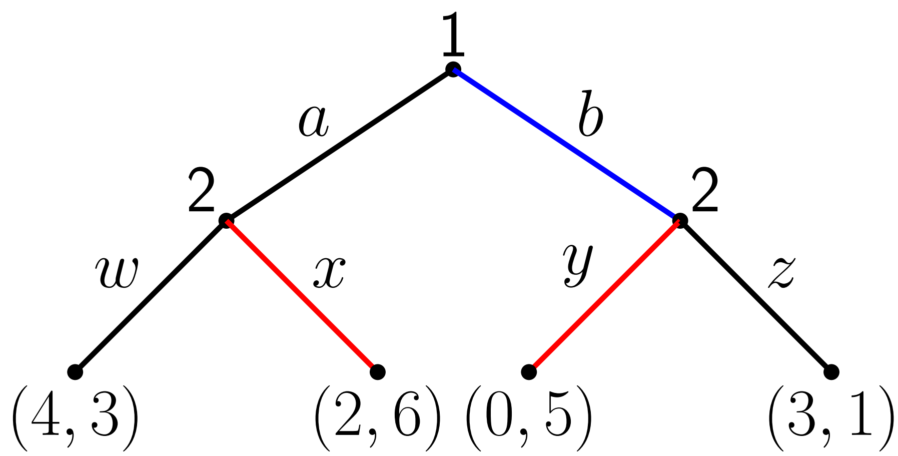
$$(w, y), \quad (w, z), \quad (x, y), \quad (x, z)$$

  – z.B.: (x, z) spezifiziert x am linken Knoten und z am rechten Knoten

- Eine Strategie für SP2 ist von der Form:

  s_2=(Aktion am linken Knoten, Aktion am rechten Knoten)

Beispiel:



- Spielt SP1 $s_1 = b$ und SP2 $s_2 = (x, y)$ ...
  - ... so ergibt sich der tatsächliche **Spielpfad** (b, y)
- Eine Strategie beschreibt also nicht nur das tatsächliche Verhalten ...

  ... sondern das hypothetische Verhalten in allen "möglichen Welten":

  - "Wenn mein Gegenspieler dies und jenes täte,...

    ... dann würde ich dies und jenes tun"

Formale Definition einer Strategie

- Sei $\mathcal{J}_i = \{J_{i1}, \ldots J_{iK}\}$ die Menge der Informationsmengen von SPi
- Sei A_{ik} die Menge der Aktionen, die SPi an der Info-menge J_{ik} zur Verfügung hat
- Sei $A_i = \cup_k A_{ik}$ die Menge aller Aktionen von SPi

Definition: Eine (reine) Strategie s_i für Spieler i ist eine Abbildung

$$s_i : \mathcal{J}_i \mapsto A_i$$

mit der Eigenschaft: $s_i(J_{ik}) \in A_{ik}$

- [$s_i(J_{ik})$ ist die Aktion von SPi an der Info-menge J_{ik}]

Strategien, wenn ein SP wiederholt zieht

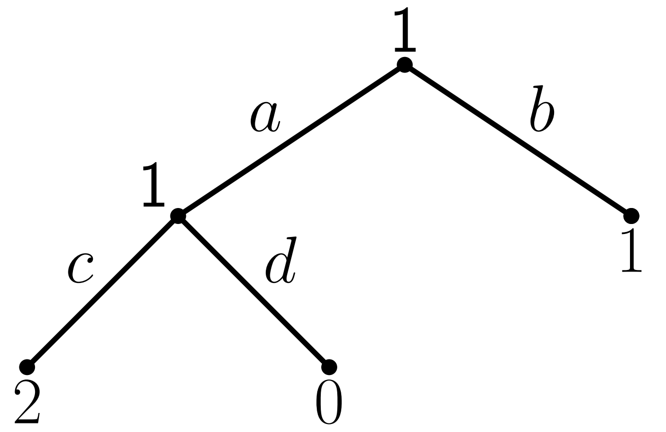
- Eine Strategie spezifiziert das Verhalten an Informationsmengen, ...

  ... auch wenn diese gar nicht erreicht werden

- Dies erscheint vielleicht überflüssig, wenn ein Spieler zwei mal zieht
  - ... denn dann hängt ja von der ersten Aktion ab, ...
  - ... ob und welche Info-menge später erreicht wird

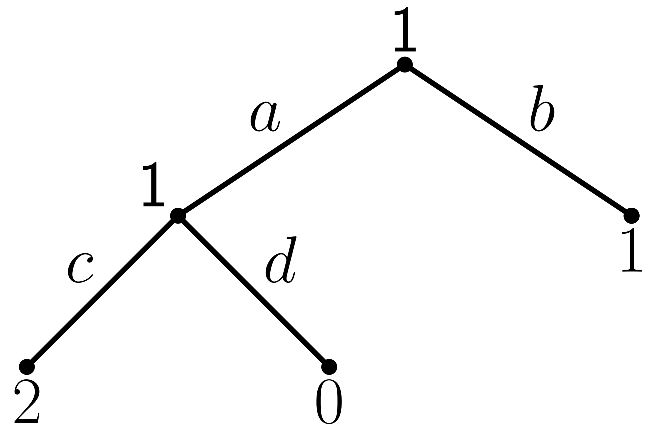
- Zur Illustration betrachten wir ein dynamisches nicht–strategisches Entscheidungsproblem

Beispiel



- SP1 hat vier Strategien: (a, c), (a, d), (b, c), (b, d)
- Aber was soll die Unterscheidung zwischen (b, c) und (b, d) bedeuten?
  - die Strategien spezifieren das Verhalten am zweiten Knoten ...
  - ... obwohl dieser gar nicht erreicht wird
- Punkt: die optimale Entscheidung auf Stufe 1, ...
  - ... hängt von dem Verhalten auf Stufe 2 ab!

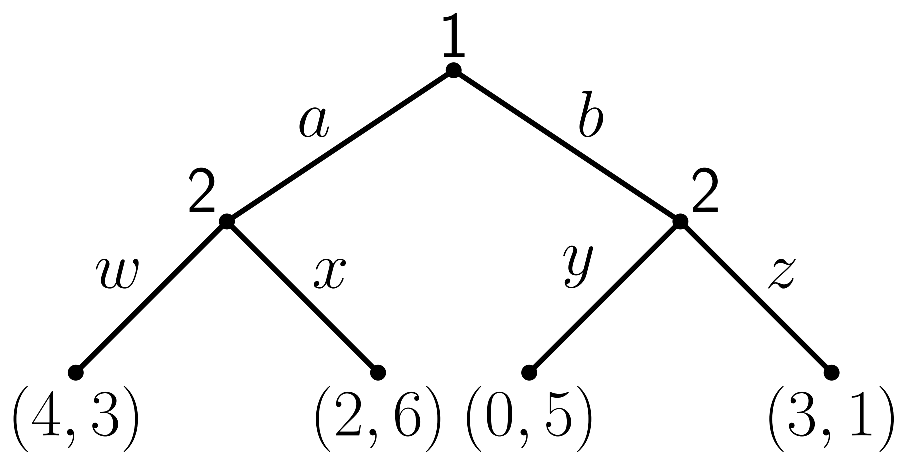
Beispiel



- **Wenn** SP1 (aus welchen Gründen auch immer) auf Stufe 2 ...
  - ... c spielt, dann ist b auf Stufe 1 suboptimal
  - ... d spielt, dann ist b auf Stufe 1 optimal
- Also: mit unserer Strategiendefinition können wir ...
  - ... optimales Verhalten in einem frühen Zeitpunkt zu bestimmen...
  - ... für ein gegebenes Verhalten in einem späteren Zeitpunkt
- In Spielen wird diese Unterscheidung sehr zentral werden

Extensive Form in Normalformdarstellung

- Wir können extensive Formen in Normalform darstellen:



	(w,y)	(w,z)	(x,y)	(x,z)
a	4,3	4,3	2,6	2,6
b	0,5	3,1	0,5	3,1

- Nutzeneinträge in den Matrixzellen entsprechen den Nutzen, ...
  - ... die aus den entsprechenden Spielpfaden resultieren

Extensive Form und Normalform

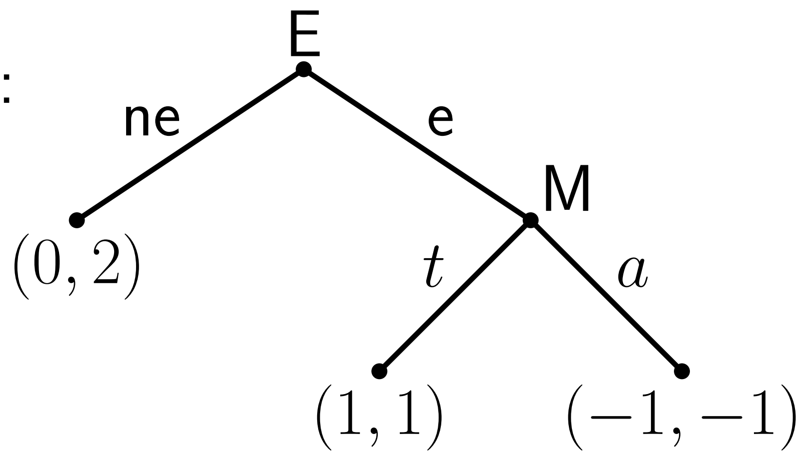
- Offenbar gilt: jeder extensiven Form entspricht genau eine Normalform
- Damit können wir die Konzepte aus der Theorie der Normalformen-spiele anwenden
  - Dominanz, beste Antwort, ...
- Insbesondere überträgt sich das Nash-Konzept als Lösungskonzept

Definition: Ein Nash-Gleichgewicht eines Spieles in extensiver Form ist ein Nash-Gleichgewicht der der extensiven Form entsprechenden Normal-form

Extensive Form und Nash-Gleichgewicht

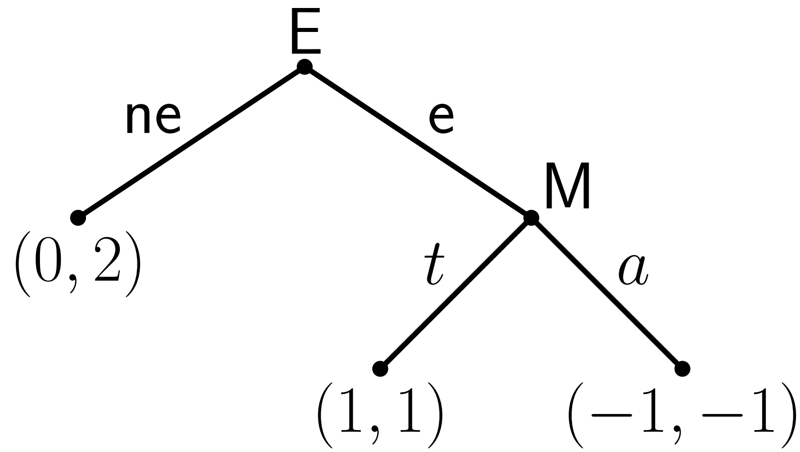
- Können wir also einfach die Nash-GGe der Normalform bestimmen und das war's?
- Nein, denn ...
  - die Normalform erfasst eine Situation, in der die SP simultan ziehen
  - d.h. sie können sich <u>ein für alle mal</u> auf ihre Aktionen festlegen
- Dies schliesst aus, dass die Spieler im Spielverlauf "lernen"
  - d.h. mit ihren Aktionen auf den <u>vorherigen</u> Spielverlauf reagieren
- Daher werden wir das Nash-Konzept anpassen

Markteintrittspiel:



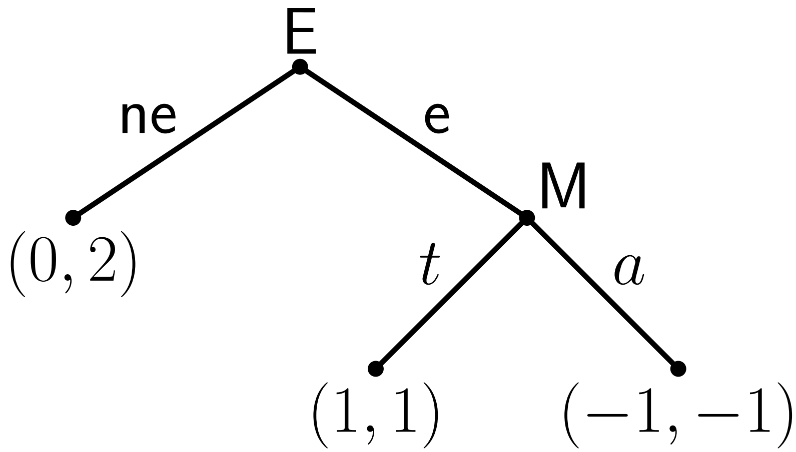
- Zwei Spieler: E = Eindringling, M = Monopolist
  - E kann in den Markt eintreten (e) oder nicht (ne)
  - Bei Markteintritt kann M aggressiv sein (a) oder den Markt teilen (t)
- Normalform:

	t	a
ne	0,2	0,2
e	1,1	–1,–1



	t	a
ne	0,2	0,2
e	1,1	–1,–1

- Die Normalform hat zwei Nash-GG: (ne, a) und (e, t)
- Betrachte das Nash-GG (ne, a):
  - Die Strategie a von M ist eine Drohung an E:
  - "Wenn du eintrittst, dann werde ich dich bekämpfen!"
- Wenn E dieser Drohung glaubt, ...
  - ... sollte er in der Tat ne wählen $(0 > -1)$
- Doch ist diese Drohung wirklich überzeugend??



	t	a
ne	0,2	0,2
e	1,1	−1,−1

.

- E kann sich sagen: Wenn ich erst mal e gewählt habe, ...
  - ... dann ist es für M besser, den Markt zu teilen $(1 > -1)$
  - ... da kann er noch so viel drohen, letztlich wird er's nicht durchziehen
  - ... also sollte ich eintreten
- Das Nash-GG (ne, a) ist unplausibel, denn es basiert auf einer

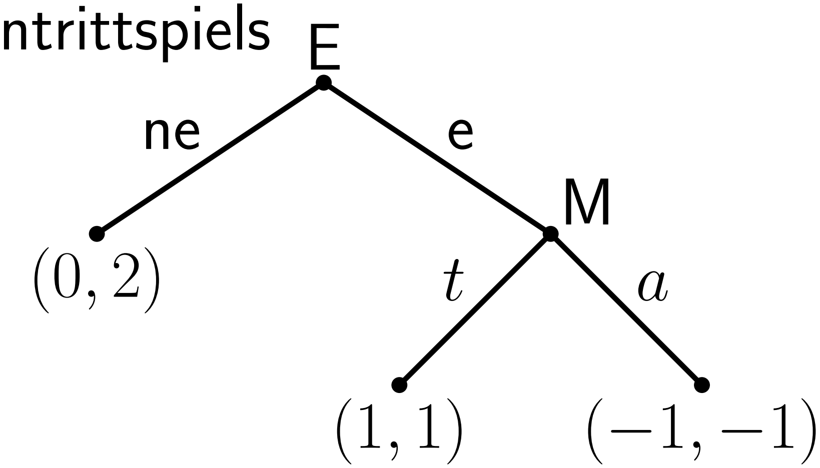
unglaubwürdigen Drohung

seitens des Monopolisten

Unglaubwürdige Drohung und Zeitinkonsistenz

- Der Monopolist würde sich gerne glaubwürdig auf a festlegen
  - denn das würde E vom Eintritt abschrecken
- In der Normalform ist so eine Festlegung im Prinzip denkbar
  - Ausführung der Aktionen einem Computer übergeben
- Doch in einem echt dynamischen Spiel werden rationale Spieler auf die Ereignisse im Spiel reagieren
- Pläne die ex ante optimal sind, können ex post suboptimal sein
- Solche Pläne sind **zeitinkonsistent**
  - Die Strategie a von M ist zeitinkonsistent

Lösung des Markteintrittspiels



- Wir würden also erwarten, dass E erkennt, ...

  ... dass a eine unglaubwürdige Drohung ist und somit ...

  ... in den Markt eintritt

  $\Rightarrow (e, t)$ ist Spielausgang (Beachte: (e, t) ist auch ein Nash-GG)

- Nash-GGe ohne unglaubwürdige Drohungen bzw. ohne zeitinkonsiste Pläne, nennt man

teilspielperfekt