KAP 10. Teilspiele und Teilspielperfektheit (vollk. Info)

- In Kap. 9 gesehen:
- Manche Nash-GGe in extensiven Spielen erscheinen unplausibel:
  - wenn sie unglaubwürdige Drohungen ...
  - ... bzw. zeitinkonsistente Pläne enthalten
- Teilspielperfektheit ist ein Lösungskonzept, das diesen Aspekt berücksichtigt
- Teilspielperfektheit erfasst dynamische Rationalität
  - bygones are bygones
  - was geht mich mein Geschwätz von gestern an

Teilspiele unter vollkommener Information

Definition: Ein Teilspiel eines extensiven Spieles unter vollkommener Information ist

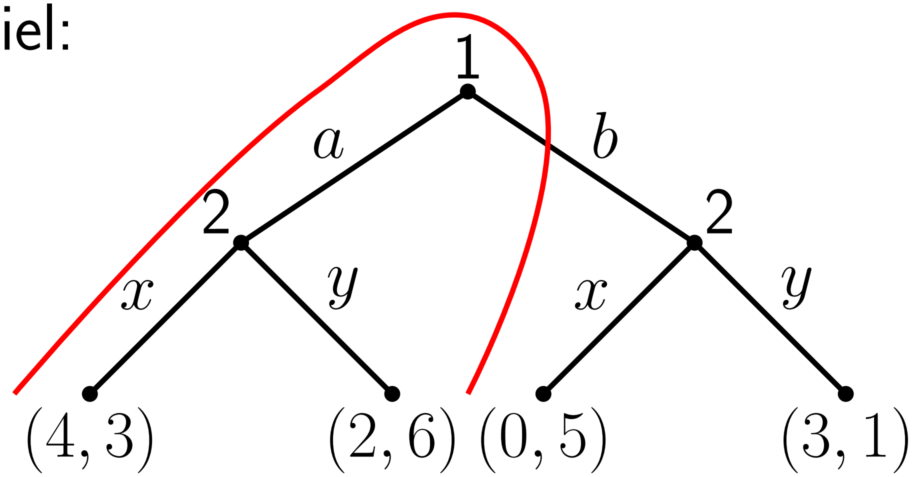
- jeder (gesamte) Teilabschnitt innerhalb eines Spielbaums, ...
- ... der von einem Entscheidungsknoten abgeht

- Ein solcher Teilabschnitt stellt ein neues Spiel in extensiver Form dar:
  - ein Teilspiel des Originalspiels
- Der Entscheidungsknoten, von dem der Teilabschnitt abgeht
  - ist der Anfangsknoten des Teilspiels
- Beachte: das Originalspiel ist selber ein Teilspiel

Beispiel

KEINE Teilspiele

- Abschnitte, die nicht alle von einem Knoten abgehende Zweige umfassen
  - sind keine Teilspiele
- Bsp: Kein Teilspiel:



- Der Abschnitt innerhalb der roten Linie ist KEIN Teilspiel
  - denn er umfasst nicht alle Aktionen des Entscheidungsknotens

Teilspielperfektheit unter vollkommener Information

Definition: Ein **teilspielperfektes** Nash-Gleichgewicht eines extensiven Spiels ist ein Strategienprofil $(s_1, ..., s_n)$ ...

–... welches ein Nash-Gleichgewicht in jedem Teilspiel ist

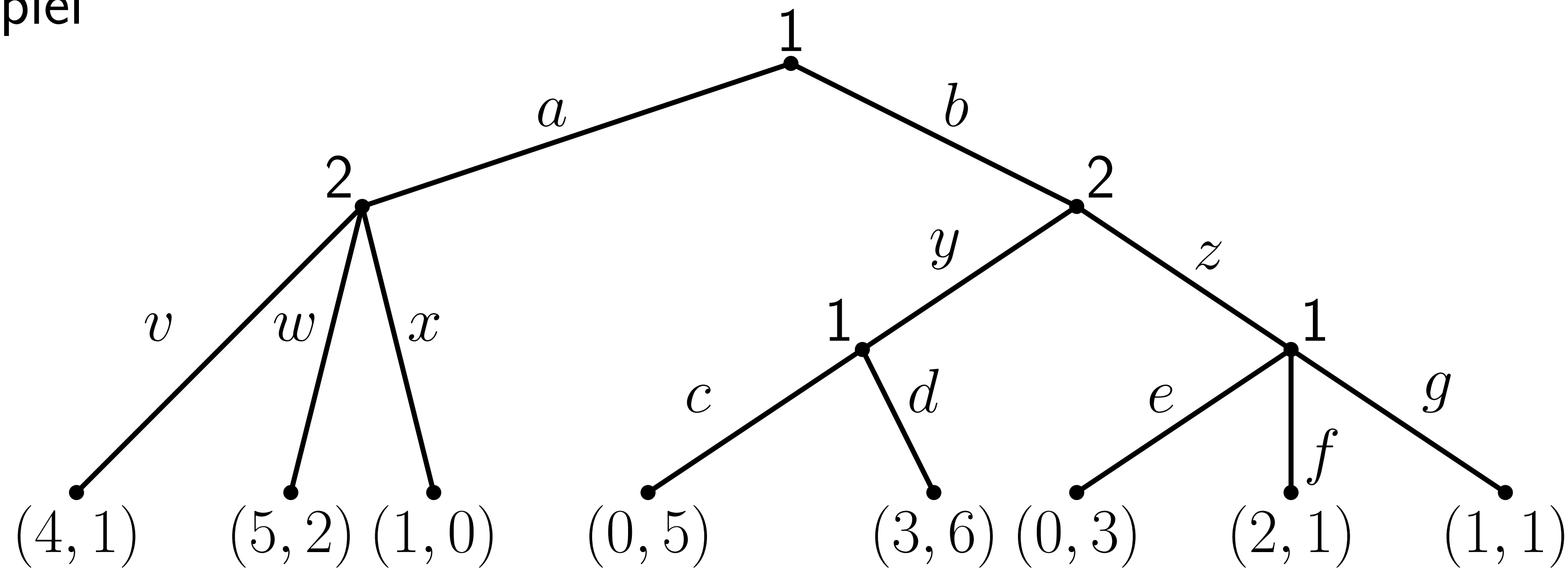
- Beachte: Definition umfasst das gesamte Strategienprofil
  - also auch Strategien in T-spielen, die nicht tatsächlich erreicht werden!
- In endlichen Spielen kann man TPNGe durch

R ü c k w ä r t s i n d u k t i o n

bestimmen

Rückwärtsinduktion

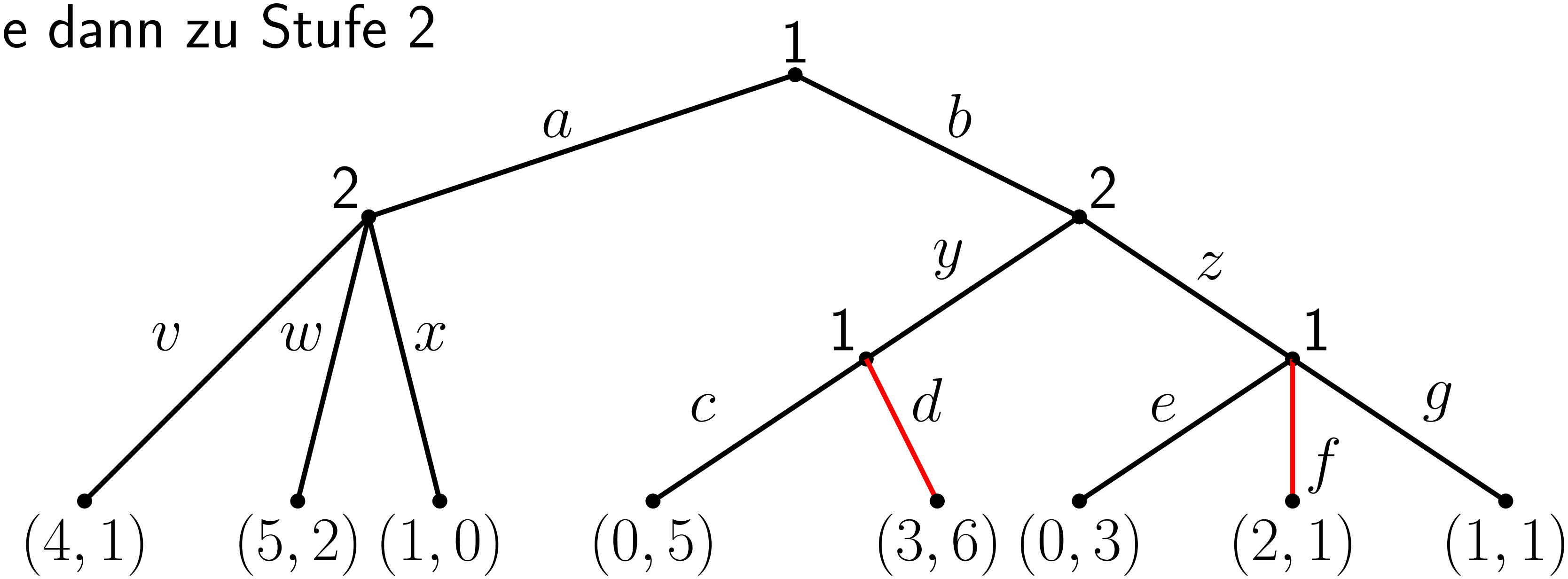
Beispiel



Insgesamt 5 T-Spiele: zwei auf Stufe 3, zwei auf Stufe 2, eins auf Stufe 1

- Beginne auf Stufe 3:
  - im linken T-Spiel: d optimal für SP1
  - im rechten T-Spiel: f optimal für SP1

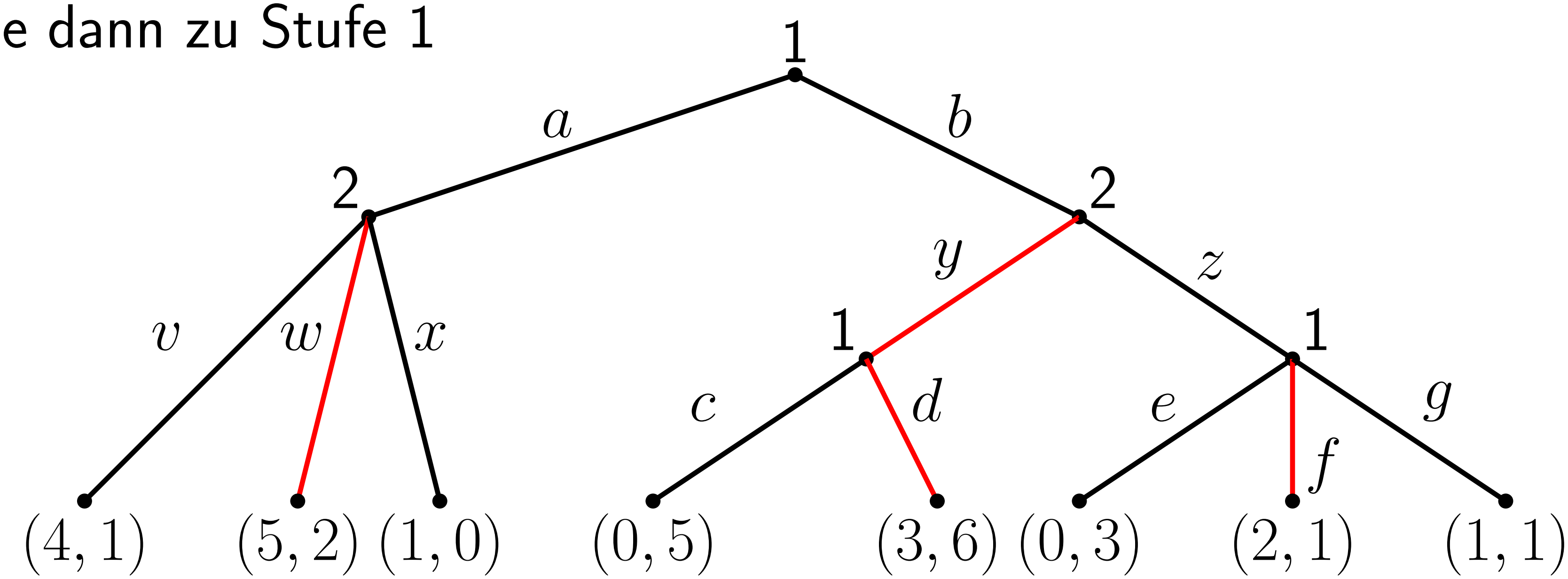
Gehe dann zu Stufe 2



- Linkes T-Spiel: w optimal für SP2
- Rechtes T-Spiel: Gegeben die Strategie (d, f) von SP1 auf Stufe 3:
  - y ist beste Antwort für SP2 gegen $s_1 = (d, f)$
  - Damit: $s_1 = (d, f)$, $s_2 = y$ ist Nash-GG dieses T-Spiels

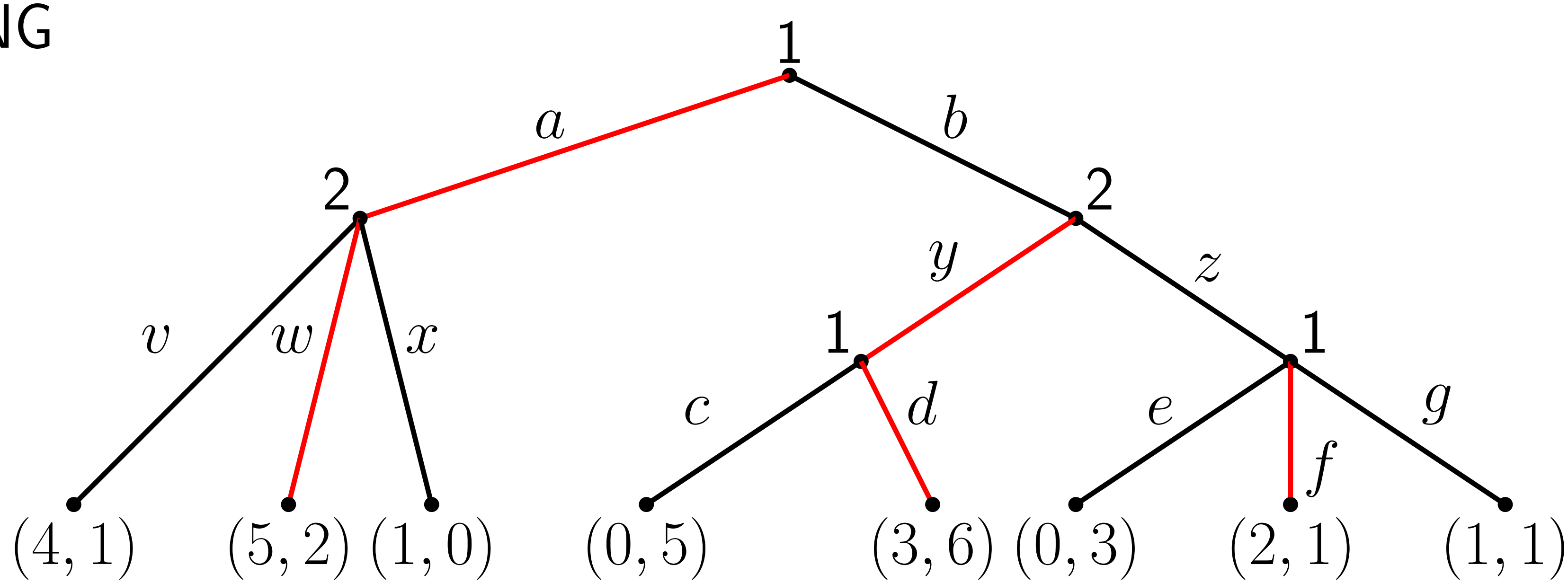
(Beachte: $s_1 = (d, f)$ war offenbar beste Antwort auf $s_2 = y$)

Gehe dann zu Stufe 1



- Nur noch ein T-Spiel:
- Gegeben die Fortsetzungs-Strategie (w, y) von SP2 und (d, f) von SP1:
  - a ist beste Antwort für SP1 auf Stufe 1
- Damit: $s_1 = (a, (d, f))$, $s_2 = (w, y)$ ist Nash-GG des Spiels
  - per Konstruktion: (s_1, s_2) auch Nash-GG aller Teilspiele
  - Also auch teilspielperfektes Nash-GG

TPNG



- (a, w) heisst <u>Gleichgewichtspfad</u>
- Die Strategien in den anderen T-Spielen sind Teil des GG ...
  - ... auch wenn diese T-Spiele nie erreicht werden!
- Grund: betrachte Stufe 1: ob a oder b eine beste Antwort ist,...
  - ... hängt davon ab, was in allen Folgeteilspielen passiert!

Jetzt noch mal zum Begriff einer Strategie

- Auf Stufe 1 bedeutet strategisch denken:
  - SP1 prognostiziert, wie die Spieler in den Folgespielen reagieren
  - auf dieser Grundlage wählt er seine optimale Aktion auf Stufe 1
  - erst dies determiniert, welche Kntn erreicht werden und welche nicht
- Das Verhalten an Knoten, die nie erreicht werden, ist also ...
  - ... ursächlich dafür, welche Knoten tatsächlich erreicht werden
    - nicht umgekehrt!
- MaW: Unser Strategiebegriff ist notwendig, um zu überprüfen, ob ...

  ... eine bestimmte Aktion an einem bestimmten Knoten optimal ist

Zu den Annahmen hinter dem Rückwärtsinduktionsverfahren

- Rückwärtsinduktion basiert auf der Idee ...
  - ... dass das Verhalten eines Spielers ...
  - ... durch dessen Rationalität prognostizierbar wird
- Wenn Rationalität common knowledge ist, ...
  - ... kann ein Spieler, wenn er am Zug ist, ...
  - ... das Verhalten der anderen SP eindeutig prognostizieren
  - ... und zwar in allen Folge-Teilspielen
- Auf dieser Grundlage wählt er dann seine optimale Aktion

Satz über endliche Spiele unter vollkommener Information

- Jedes Spiel unter vollkommener Information mit endlich vielen Knoten hat ein teilspielperfektes Gleichgewicht
- Wenn für jeden Spieler gilt, dass er an jedem Endknoten eine andere Auszahlung erhählt, dann ist das GG sogar eindeutig

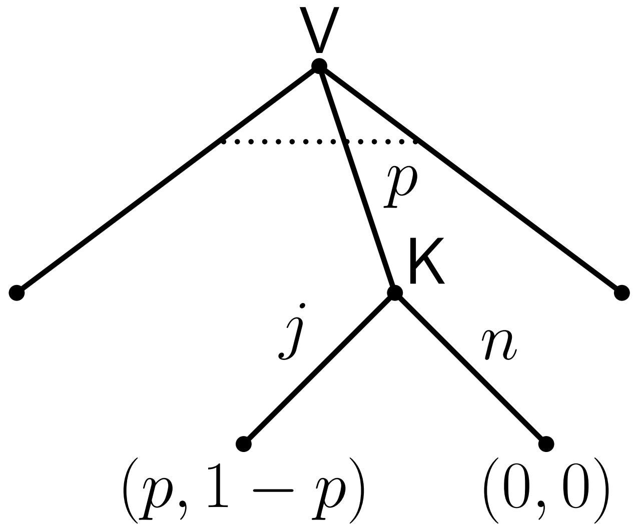
Beweis: Direkte Implikation von Rückwärtsinduktion!

Kap 11.: Anwendung – Verhandlungen

Ultimatum-Verhandlungen

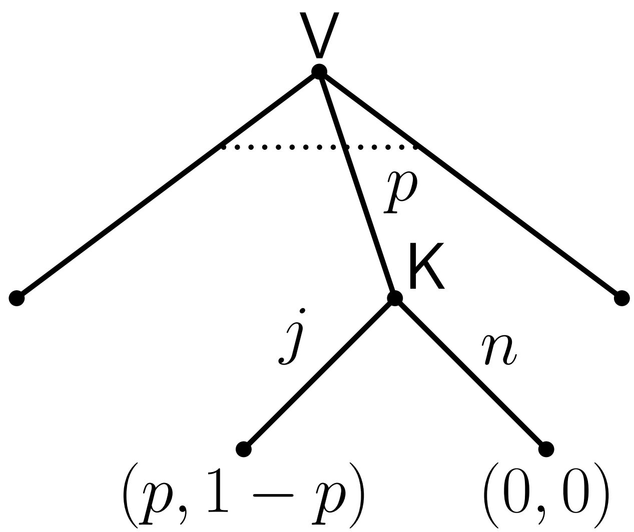
- Zwei Spieler: ein Käufer (K) und ein Verkäufer (V)
- V hat ein Gut, das ihm nichts wert ist: W_V=0
  - aber K hat eine Wertschätzung von $W_K = 1$ (und K hat Geld)
- Zuerst macht V ein Preisangebot an K: $p \in [0, 2]$
- K nimmt das Angebot an oder lehnt es ab: “ja” oder “nein”
- Wenn K annimmt, zahlt er p an V, und K erhält das Gut
- Wenn K ablehnt, endet das Spiel und beide bekommen 0
- Ist K indifferent zwischen Annehmen und Ablehnen, nimmt K an

Ultimatum Verhandlungen



- Gestrichelte Linie deutet an, dass V unendlich viele Aktionen $p \in [0, 2]$ hat
- Strategien von V: $p \in [0, 2]$
- Strategien von K: Für <u>jedes</u> p "ja" oder "nein"
  - eine Strat von K ist also eine Funktion $a_K : [0, 2] \longrightarrow \{j, n\}$

Rückwärtsinduktion: Stufe 2



- Betrachte T-SP, in dem V p angeboten hat
  - Wenn K "ja" sagt, dann kriegt er $1 - p$
  - Wenn K "nein" sagt, dann kriegt er 0
- Also "ja" genau dann, wenn $p \leq 1$ (Beachte Indifferenzregel)

- Also: Ks teilspielperfekte Strategie ist

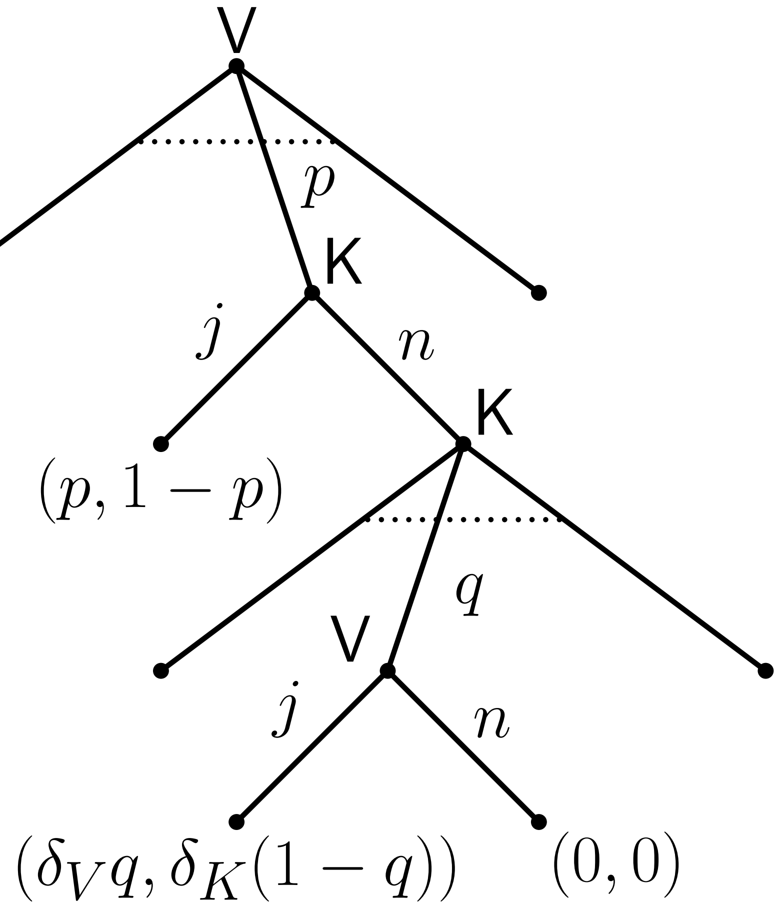
$$a_K^*(p) = \begin{cases} j & \text{wenn } p \leq 1 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

- <u>Stufe 1</u>: Sei a_K^* gegeben. Wenn V den Preis p anbietet, ...
  – ... bekommt er p, wenn $p \leq 1$
  - ... bekommt er 0, wenn $p > 1$
- Also: Optimale Strategie für V: $p^* = 1$
- Damit TPNG: $s_V^* = p^*, \quad s_K^* = a_K^*(\cdot)$
- Beachte: V erhält den gesamten "Kuchen" (benefits from trade)
  – V hat volle <u>Verhandlungsmacht</u>

Verhandlungen mit einem Angebot und einem Gegenangebot

- Modell wie oben, aber:
- Wenn K ablehnt, kann er ein Gegenangebot machen von $q \in [0, 1]$
- V kann annehmen oder ablehnen: "ja" oder "nein"
- Wenn V ablehnt, endet das Spiel
- Wenn V annimmt, dann erhält V q und K bekommt das Gut
- Ausserdem nehmen wir an, dass Warten teuer ist
  - Gewinne werden mit $\delta_V, \delta_K \in [0, 1]$ abdiskontiert ...
  - ... wenn es erst in Runde 2 zu einem Handel kommt
  - kleines δ bedeutet: ungeduldige Spieler, Warten teuer

Angebot und Gegenangebot



Strategie V: $p \in [0, 2]$ $a_V(p, q) \in \{j, n\}$

Strategie K: $a_K(p) \in \{j, n\}$ $q(p) \in [0, 1]$

Rückwärtsinduktion

Stufe 4: Sei p, q gegeben

- V ist jetzt in der gleichen Situation wie K vorher auf Stufe 2
- Also Vs optimale Strategie auf Stufe 4:

$$a_V^*(p,q) = \begin{cases} j & \text{wenn } q \geq 0 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

(hängt nur "formal" von p ab, p nicht "payoff-relevant")

Stufe 3: Sei p gegeben

- K ist jetzt in der gleichen Situation wie V vorher auf Stufe 1
- Also Ks optimale Strategie auf Stufe 3:

$$q^*(p) = 0 \text{ für alle } p$$

Stufe 2: Sei Vs Angebot p gegeben

– Wenn K “ja” sagt, kriegt er $1 - p$

– Wenn K “nein” sagt, kriegt er $\delta_K(1 - q^*(p)) = \delta_K$

• Also “ja” ist optimal, wenn $p \leq 1 - \delta_K$

• Also Ks teilspielperfekte Strategie auf Stufe 2:

$$a_K^*(p) = \begin{cases} j & \text{wenn } p \leq 1 - \delta_K \\ n & \text{sonst} \end{cases}$$

Stufe 1: Gegeben a_K^*. Wenn V p anbietet, ...

– ... bekommt V p, wenn $p \leq 1 - \delta_K$

– ... bekommt V 0, wenn $p > 1 - \delta_K$

• Also: Optimale Strategie $p^* = 1 - \delta_K$

Verhandlungen mit Angebot und Gegenangebot

- TPNG: $s_V^* = (p^*, a_V^*(\cdot)) \quad s_K^* = (a_K^*(\cdot), q^*(\cdot))$
- Beachte:
  - Verkäufer erhält nun den Nutzen $1 - \delta_K$
  - Käufer erhält nun den Nutzen δ_K
- Also, wenn Warten für K nicht teuer ist $\delta_K \approx 1$, ...
  - dann bekommt nun K den gesamten Kuchen
- Im Vergleich zum Ultimatum-Spiel hat sich die Verh-macht umgedreht
- K kann bis zum Ende warten und dann V “auspressen”
  - das lohnt sich, wenn Warten nicht allzu teuer ist (δ_K gross)

Verhandlungen mit alternierenden Angeboten

- In endlichen Verhandlungen scheint also der letzte Spieler einen Vorteil zu haben
  - ... wenn er relativ geduldig ist
- In der Realität enden Verhandlungen nicht zu einem festen Zeitpunkt
- Prinzipiell kann man unendlich lange verhandeln
  - immer wieder kann es ein Angebot der Gegenseite geben
- Um dies zu modellieren, erweitern wir das obige Spiel ins Unendliche
  - Hauptproblem: dann keine Rückwärtsinduktion mehr möglich