Aufgabe 2.1 Stelle folgende Mengen graphisch in einem zwei–dimensionalen Koordinatensystem dar. (Bekanntlich gilt für reelle Zahlen a, b, $a \leq b$ die Intervalldefinition $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$.)
(a) $\{0, 1\} \times \{0, 3\}$, (b) $\{0, 1, 2\} \times \{0, 3, 5\}$, (c) $\{0, 1\} \times [0, 3]$; (d) $[0, 3] \times \{0, 1\}$;
(e) $(\mathbb{R} \times [0, 1]) \cap ([0, 1] \times \mathbb{R})$; (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 5, y \leq 5\}$; (g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y^2\}$.

Aufgabe 2.2 Betrachte die Menge I–dimensionaler Vektoren $s = (s_1, \ldots, s_I) \in \mathbb{R}^I$.
(a) Für $I = 3$ sei die Funktion $u : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ gegeben durch die Abbildungsvorschrift

$$u(s) = -s_1^2 + 2s_1s_2 + 2s_2s_3^2 - s_3.$$

(i) Sei $\bar{s} = (1, 0, 0)$. Bestimme die Funktionswerte $u(\bar{s})$, $u(\bar{s}_{-1}, 0)$, $u(\bar{s}_{-2}, 1)$, $u(\bar{s}_{-3}, 2)$.
(ii) Berechne die Ableitung $\partial u(s)/\partial s_3$.
(iii) Sei s_1^* der Wert von s_1, welcher u maximiert. Bestimme s_1^* in Abhängigkeit von s_{-1}.
(b) Die Durchschnittsfunktion $D_I : \mathbb{R}^I \mapsto \mathbb{R}$ ist gegeben durch $D_I(s) = \frac{1}{I}(s_1 + \ldots + s_I)$. Zeige, dass für alle $i = 1, \ldots, I$ gilt:

$$D_I(s) = \frac{1}{I}s_i + \frac{I-1}{I}D_{I-1}(s_{-i}).$$

Aufgabe 2.3 Betrachte das folgende Umweltproblem. Es gibt n Spieler, von denen jeder entweder mit dem öffentlichen Nahverkehr (ÖPNV) oder mit dem Auto zur Arbeit fahren kann. Jeder Spieler i hat also zwei Strategien $s_i \in \{0, 1\}$, wobei $s_i = 0$ der Nutzung des ÖPNV entspreche, und $s_i = 1$ der Nutzung des Autos. Für ein Strategienprofil $s = (s_1, \ldots, s_n)$ ist die Luftqualität $q(s)$ gegeben durch $q(s) = -(s_1 + \ldots + s_n)$. Der *zusätzliche* Nutzen, den ein Spieler aus der Nutzung des Autos erhält, beträgt v, wobei gelte: $1 < v < n$. Der Nutzen eines Spielers ist also $u_i(s_i, s_{-i}) = q(s) + vs_i$.
(a) Bestimme das Strategienprofil, welches die Gesamtwohlfahrt maximiert. (Die Gesamtwohlfahrt ist durch die Summe der Nutzen der Spieler gegeben.)
(b) Ist das Spiel dominanzlösbar? Wenn ja, wie lautet die Dominanzlösung?
(c) Bei dem Spiel handelt es sich um ein soziales Dilemma. Erkläre, inwiefern?

Bitte wenden!

Aufgabe 2.4 Betrachte das Teamproblem mit 2 Spielern $i = 1, 2$, Strategiemengen $S_i = [0, \infty)$ und Nutzenfunktionen

$$u_i(s_i, s_{-i}) = s_1 + s_2 + g \cdot s_1 \cdot s_2 - 1/2 \cdot s_i^2.$$

$g \geq 0$ ist ein Parameter.

(a) Betrachte zuerst den Fall $g = 0$. Zeige, dass das Spiel dominanzlösbar ist, und bestimme die Dominanzlösung!

(b) Sei von nun an $g > 0$. Zeige, dass die Menge strikt dominierter Strategien für jeden Spieler gegeben ist durch $[0, 1)$.

(c) Zeige, dass bei der wiederholten Eliminierung strikt dominierter Strategien nach der zweiten Runde die Strategienmenge $[1 + g, \infty)$ für jeden Spieler überlebt.