

Aufgabe 8.1 Betrachte zwei Firmen $i = 1, 2$, welche Fahrräder produzieren. Ein Fahrrad kann entweder von “guter” oder “schlechter” Qualität sein. Sowohl gute als auch schlechte Fahrräder können mit konstanten und identischen Grenzkosten $c = 0$ produziert werden. Firma 1 hat bereits entschieden, dass sie gute Fahrräder produziert. Firma 2 hingegen hat die Qualität ihrer Fahrräder noch nicht bestimmt. Die Firmen spielen das folgende Zwei-Stufen-Spiel. In der ersten Stufe wählt Firma 2 die Qualität ihrer Fahrräder. Nach Stufe 1 und bevor Stufe 2 beobachtet Firma 1, welche Qualität Firma 2 gewählt hat. In der zweiten Stufe wählen die Firmen simultan Preise p_1 und p_2 . Es gibt ein Kontinuum von Konsumenten der Masse 1. Der Nutzen eines Konsumenten, wenn er ein Fahrrad der Firma i kauft, beträgt $r_i - p_i$, wobei r_i der Basisnutzen ist, den der Konsument aus dem Gebrauch des Fahrrades erzielt. Für alle Konsumenten ist der Basisnutzen aus einem guten Fahrrad $r = 1$.

(a) Betrachte zunächst den Fall, dass der Basisnutzen für ein schlechtes Fahrrad unter den Konsumenten gleichverteilt auf $[0, 1]$ ist. D.h. Konsument $x \in [0, 1]$ erzielt gerade den Basisnutzen x aus dem Gebrauch eines schlechten Fahrrades. Bestimme alle teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte des Zwei-Stufen-Spiels.

(b) Nimm nun, dass alle Konsumenten den gleichen Basisnutzen $r = 1/2$ aus dem Gebrauch eines schlechten Fahrrades erzielen. Betrachte diejenigen Teilspiele auf Stufe 2, nachdem Firma 2 eine schlechte Qualität gewählt hat und zeige, dass die Preiskombination $p_1 = 1/2$ und $p_2 = 0$ ein Nash-Gleichgewicht des Preisspiels ist.

(c) Bestimme nun die teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte des gesamten Zwei-Stufen-Spiels unter der Annahme in (b).

Aufgabe 8.2 Betrachte das folgende Basisspiel

	x	y	z
a	$-1, -1$	$0, 0$	$4, 0$
b	$v, 4$	$-1, -1$	$3, 3$

Hierbei sei v ein Parameter mit $v > -1$.

(a) Bestimme alle Nash-Gleichgewichte in reinen Strategien.

(b) Nimm nun an, dass das Basisspiel zwei mal nacheinander gespielt wird und die Spieler in der zweiten Runde den Ausgang der ersten Runde beobachten können. Betrachte die folgende Strategie s_1 für Spieler 1. In Runde 1: spiele b . In Runde 2: spiele b , falls in der ersten Runde

(b, z) gespielt worden ist; spiele a andernfalls. Betrachte ausserdem die folgende Strategie s_2 für Spieler 2. In Runde 1: spiele z . In Runde 2: spiele x , falls in der ersten Runde (b, z) gespielt worden ist; spiele y andernfalls.

Wie groß muss v mindestens sein, damit das Strategienprofil (s_1, s_2) ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht des zwei mal wiederholten Spieles ist?

Aufgabe 8.3 Betrachte ein unendlich oft wiederholtes Spiel des folgenden Basisspiels:

Spiel 1	x	y
a	10,6	4,10
b	11,4	5,5

- Bestimme das Nash-GG des Basisspiels.
- Definiere für das unendlich oft wiederholte Spiel die Trigger-Strategie für Spieler $i = 1, 2$, in der in Periode 0 Spieler 1 mit Aktion a beginnt und Spieler 2 mit Aktion x .
- Für welche Werte des Diskontfaktors $\delta \in [0, 1)$ sind die in (b) definierten Trigger-Strategien ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht des unendlich oft wiederholten Spieles?
- Wie verändert sich der kritische Diskontfaktor, wenn der Spielverlauf lediglich jeweils nach drei Runden enthüllt wird?

Aufgabe 8.4 Betrachte einen Markt, in dem in jeder Periode $t = 0, 1, 2, \dots$ die Nachfragefunktion $D(p)$ gegeben sei durch $D(p) = 1 - p$. Es gibt zwei identische Firmen, $i = 1, 2$, mit Grenzkosten $c = 0$. In jeder Periode setzen die Firmen simultan einen Preis $p_i \in [0, 1]$. Wenn $p_i < p_j$, dann bedient Firma i den ganzen Markt und ihr Gewinn ist $\pi_i = D(p_i)p_i$, und der Gewinn von Firma j ist $\pi_j = 0$. Falls beide Firmen den gleichen Preis $p_i = p_j$ setzen, teilen sie sich den Markt, und jede Firma macht den Gewinn $\pi_i = \pi_j = 0.5 \times D(p_i)p_i$. Beide Firmen diskontieren Zukunftsgewinne mit dem Diskontfaktor $\delta \in [0, 1)$.

- Bestimme das Nash-Gleichgewicht des Basisspiels (d.h. wenn es nur eine Periode gibt).
- Definiere die Trigger-Strategie für Firma i , in der sie in $t = 0$ mit dem Preis $p = 1/2$ beginnt.
- Zeige, dass diese Trigger-Strategien ein teilspielperfektes Gleichgewicht im unendlich oft wiederholten Spiel bilden, wenn $\delta > 1/2$.