

1 Mengen

1.1 Elementare Definitionen

Mengendefinition Die elementarsten mathematischen Objekte sind Mengen. Für unsere Zwecke ausreichend ist die ursprüngliche Mengendefinition von Cantor¹:

Unter einer “Menge” verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohl-unterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die “Elemente” von M genannt werden) zu einem Ganzen.

- Häufig werden Mengen durch geschweifte Klammern bezeichnet:

$$M = \{ \text{Elemente} \}.$$

Beispiel: – $M_1 = \{1, 2, 3\}$ ist die Menge, die aus den Elementen 1,2,3 besteht.

– Mit $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ bezeichnen wir die Menge der natürlichen Zahlen.

– $\mathbb{R}$ die Menge der reellen Zahlen.

- Die Schreibweise

$$m \in M$$

bedeutet, dass das Objekt m ein Element der Menge M ist, etwa gilt: $1 \in M_1$.

- Die Schreibweise

$$m \notin M$$

bedeutet, dass das Objekt m *kein* Element der Menge M ist, etwa gilt: $4 \notin M_1$.

Sprechweisen Wenn wir sagen

“Sei M eine Menge”,

so meinen wir damit, dass M irgendeine *beliebige* Menge ist. Wir wissen dann (lediglich, aber immerhin), dass das Objekt M die definitorischen Eigenschaften einer Menge erfüllt, also eine Ansammlung von Elementen ist.

¹Georg Cantor, deutscher Mathematiker, 1874-1897.

- Wenn wir hingegen eine *spezifische* Menge definieren wollen, so kennzeichnen wir explizit, wie diese Menge aussieht. So bedeutet etwa

$$\text{“Sei } M_2 = \{1, 2, 3, 4\}\text{”},$$

dass M_2 die spezifische Menge darstellt, die aus den Elementen 1,2,3,4, besteht.²

- Ob man eine beliebige oder spezifische Menge meint, sollte man, streng genommen, symbolisch entsprechend unterscheiden. Die Unterscheidung wird aber häufig aus dem Kontext klar.
- Analog meinen wir, wenn wir sagen,

$$\text{“Sei } m \in M\text{”},$$

dass m irgendein *beliebiges* Element der Menge M bezeichnet. Etwa könnten wir sagen: Sei $m \in M_1$, dann gilt: $m < 4$. Oder, wenn wir sagen: “Sei $x \in \mathbb{R}$ ”, dann bezeichnet x eine beliebige reelle Zahl.

- Wenn wir hingegen sagen: “Sei $m_1 = 1$ ”, so definieren wir m_1 als das *spezifische* Element 1. Oder, wenn wir sagen: “Sei $x = \sqrt{2}$ ”, dann wird x als die spezifische reelle Zahl $\sqrt{2}$ festgelegt.

Gleichheit Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Etwa:

$$\{1, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 3\} = \{1, 2, 3\},$$

$$\{3, 1, 2\} = \{1, 2, 3\}$$

Um die Gleichheit zweier Mengen zu beweisen, muss man also beweisen, dass jedes Element der einen Menge auch ein Element der anderen Menge ist, und umgekehrt. Formal:³

$$M = M' \quad \Leftrightarrow \quad \text{für alle } m \in M : m \in M' \quad \text{und} \quad \text{für alle } m' \in M' : m' \in M.$$

Leere Menge Eine Menge, die keine Elemente enthält, ist leer. Die leere Menge bezeichnen wir mit $\emptyset$.

²Um anzudeuten, dass es sich um eine Definition handelt, durch die das Objekt “ M_2 ” definiert wird, schreibt man häufig auch $M_2 := \{1, 2, 3, 4\}$.

³Das Symbol $\Leftrightarrow$ bedeutet “genau dann, wenn”. Wir schreiben $e \Rightarrow e'$, wenn die Eigenschaft e die Eigenschaft e' impliziert. Beispiel: Wenn es regnet, ist die Straße naß: $\text{Regen} \Rightarrow \text{Straße naß}$. (Jedoch nicht umgekehrt). Wir schreiben $e \Leftrightarrow e'$ wenn e die Eigenschaft e' impliziert und e' die Eigenschaft e impliziert. Beispiel: Man ist volljährig genau dann, wenn man mindestens 18 Jahre alt ist: “mindestens 18 Jahre $\Rightarrow$ volljährig” und “volljährig $\Rightarrow$ mindestens 18 Jahre”.

Teilmenge Enthält eine Menge M alle Elemente der Menge M' , so ist M' eine Teilmenge der Menge M . Wir schreiben: $M' \subseteq M$. Formal:

$$M' \subseteq M \Leftrightarrow \text{Für alle } m' \in M' : m' \in M.$$

Beispiel: $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$; $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$; die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

• Enthält eine Menge M alle Elemente der Menge M' sowie noch andere Elemente darüber hinaus, so ist M' eine echte Teilmenge der Menge M . Wir schreiben: $M' \subset M$. Formal:

$$M' \subset M \Leftrightarrow M' \subseteq M \text{ und } M \neq M'.$$

• Teilmengen werden häufig wie folgt definiert. Sei M eine Menge. Dann schreiben wir für die Teilmenge aller Elemente in M , die eine bestimmte Eigenschaft e erfüllen:

$$\{m \in M \mid m \text{ hat die Eigenschaft } e\}.$$

Beispiel: $\{1, 3\} = \{m \in M_1 \mid m \text{ ist ungerade}\}$; $\{2\} = \{m \in M_1 \mid m \text{ ist gerade}\}$.

Beachte: Es ist wichtig, dass die Ursprungsmenge spezifiziert wird! Die Menge $\{m \mid m \text{ ist ungerade}\}$ ist nicht sauber definiert, denn:⁴

$$\{m \in \{1, 2, 3\} \mid m \text{ ist ungerade}\} \neq \{m \in \{4, 7, 9\} \mid m \text{ ist ungerade}\}.$$

Durchschnitt Befindet sich ein Element m sowohl in einer Menge M als auch in einer Menge M' , so ist m im Durchschnitt der Mengen M und M' . Wir schreiben: $M \cap M'$. Formal:

$$m \in M' \cap M \Leftrightarrow m \in M \text{ und } m \in M'.$$

Beispiel: $\{1, 2, 4\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$; $M \cap \emptyset = \emptyset$.

Vereinigung Faßt man die Elemente einer Menge M und die Elemente einer Menge M' in einer großen Menge zusammen, so erhält man die Vereinigung von M und M' . Wir schreiben: $M \cup M'$. Formal:

$$m \in M' \cup M \Leftrightarrow m \in M \text{ oder } m \in M'.$$

Beispiel: $\{1, 3\} \cup \{2, 7\} = \{1, 2, 3, 7\}$; $\{1, 2, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3, 4\}$; $M \cup \emptyset = M$.

Mengen von Mengen Wir können Mengen selbst wieder in Mengen zusammenfassen. Die Elemente einer Menge von Mengen sind selber Mengen.

Beispiel: Die Menge $M = \{ \{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\} \}$ ist die Menge, die aus den Elementen $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ besteht. Beachte: $1 \notin M$. Beachte auch: $M \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

⁴Dennoch läßt man in der Praxis die Ursprungsmenge manchmal weg, wenn diese aus dem Kontext klar ist.

1.2 Produktmengen

- Häufig will man die Elemente aus verschiedenen Mengen in Listen (oder Vektoren oder Dimensionen oder Profilen) anordnen. Die daraus resultierenden Mengen sind sogenannte Produktmengen.
- Aus zwei Mengen A und B bilden wir zunächst geordnete Paare. Für $a \in A$ und $b \in B$ definieren wir das *geordnete* Paar bestehend aus a und b als

$$(a, b).$$

Unter “geordnet” ist zu verstehen, dass die Reihenfolge wichtig ist. Also: $(a, b) \neq (b, a)$, falls $a \neq b$.

Für die Menge aller geordneten Paare aus A und B schreiben wir

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

$A \times B$ heißt die Produktmenge, oder das kartesische Produkt⁵ aus A und B .

Beispiel: $\{1, 2\} \times \{5, 7\} = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7)\}$.

– $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ ist die Menge zwei-dimensionaler Vektoren, die “Ebene”.

- Ebenso können wir aus den I Mengen $A_1, \dots, A_I$ das I -fache kartesische Produkt

$$\prod_{i=1}^I A_i = A_1 \times \dots \times A_I$$

bilden, welches aus den “Vektoren” oder “Profilen”

$$a = (a_1, \dots, a_I) \text{ mit } a_i \in A_i$$

besteht. Der Eintrag a_i heißt i -te Komponenten von a .

- Wenn wir aus dem Profil a die i -te Komponenten a_i weglassen, bezeichnen wir das resultierende Profil mit

$$a_{-i} = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_I).$$

Die entsprechende Produktmenge wird mit

$$A_{-i} = A_1 \times \dots \times A_{i-1} \times A_{i+1} \times \dots \times A_I$$

bezeichnet.

Beispiel: $a = (x, 5, 27, \ell)$, dann $a_{-3} = (x, 5, \ell)$, $a_{-1} = (5, 27, \ell)$.

⁵René Descarte, französischer Mathematiker, Naturwissenschaftler und Philosoph, 1596-1650.

- Mit dem Profil

$$(a_{-i}, \bar{a}_i) = (a_1, \dots, a_{i-1}, \bar{a}_i, a_{i+1}, \dots, a_I)$$

bezeichnen wir das Profil, in welchem die i -te Komponente $\bar{a}_i$ und jede andere Komponenten $j \neq i$ gleich a_j ist.

Beispiel: $a = (x, 5, 27, \ell)$, $(a_{-2}, 10) = (x, 10, 27, \ell)$.

2 Funktionen/Abbildungen

2.1 Elementare Definitionen

- Eine Funktion (bzw. eine Abbildung—die Begriffe sind synonym) ist eine Abbildungsvorschrift, welche die Elemente einer Menge jeweils einem Element einer anderen Menge zuordnet. Beispielsweise ist der Preiskatalog eines Kaufhauses eine Funktion, die jedem Produkt im Sortiment des Kaufhauses einen Preis zuordnet.

- Eine Funktion f von einer Menge A in eine Menge B ordnet *jedem* Element a aus der Menge A *genau* ein Element b aus der Menge B zu.

Die Definition einer Funktion f umfaßt also *drei* Objekte: Die *Urbildmenge* A , die *Bildmenge* B sowie die *wohldefinierte* Abbildungsvorschrift, die spezifiziert, wie ein Element a auf seinen *Bildpunkt* $f(a)$ abgebildet wird. Formal schreiben wir:

$$f : A \rightarrow B, \quad a \mapsto f(a).$$

Mit $f : A \rightarrow B$ wird gesagt, dass f die Menge A in die Menge B abbildet, mit $a \mapsto f(a)$ wird die Abbildungsvorschrift spezifiziert. Unter “wohldefiniert” versteht man, dass für jedes Element a der Bildpunkt $f(a)$ existieren und in der Menge B liegen muss (siehe unten, für ein nicht wohldefiniertes Beispiel).

Beachte auch: Nicht jedes Element von B muss ein Bildpunkt sein, aber für jedes Element a muss es genau einen Bildpunkt geben.

- Um zu sagen, dass f irgendeine *beliebige* Funktion von A nach B ist, schreibt man häufig nur $f : A \rightarrow B$, und läßt das “ $a \mapsto f(a)$ ” weg.

- Beispiele: – Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$$

ist die Quadratfunktion, die jeder Zahl ihr Quadrat zuordnet.

– Die Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + 1$$

ordnet jeder natürlichen Zahl ihre Nachfolgerin zu.

– Sei $\Theta = \{ \text{Regen} , \text{Sonne} \}$ eine Menge von “Umweltzuständen”, und sei $A = \{ \text{Ausflug} , \text{Kino} \}$ eine Menge von “Aktionen”. Eine Funktion (oder *Strategie*) entspricht einem vollständigen Plan, der jedem Umweltzustand eine Aktion zuordnet. So spezifiziert etwa die Strategie

$$\sigma_1 : \Theta \rightarrow A, \quad \text{Regen} \mapsto \text{Kino} , \quad \text{Sonne} \mapsto \text{Ausflug}$$

die Aktion “Kino”, wenn es regnet, und die Aktion “Ausflug”, wenn die Sonne scheint.

Hingegen spezifiziert die Strategie

$$\sigma_2 : \Theta \rightarrow A, \quad \text{Regen} \mapsto \text{Kino} , \quad \text{Sonne} \mapsto \text{Kino}$$

die Aktion “Kino” für beide Umweltzustände.

– Sei $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ das abgeschlossene Einheitsintervall. Dann ist

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

keine Funktion. f ist nämlich an der Stelle $x = 0$ nicht wohldefiniert, da $f(0)$ keine reelle Zahl ist. Hingegen ist für das links offene Einheitsintervall $(0, 1] = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ die Funktion

$$f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

wohldefiniert, da der Punkt $x = 0$ nun nicht mehr zum Urbildbereich gehört.