

Aufgabe 6.1 Eine Vater will sein Kind zum Klavierüben animieren, und kündigt folgendes an: “Wenn du übst, bekommst du ein Eis. Wenn Du nicht übst, bekommst Du nichts.” Das Kind bekommt einen Nutzen von -1 aus Üben, einen Nutzen von 0 aus Nichtüben sowie einen zusätzlichen Nutzen von 2 aus dem Konsum von Eis. Der Vater beobachtet, ob das Kind übt oder nicht, und muss dann entscheiden, ob er das Eis aushändigt oder nicht. Wenn das Kind übt, erhält der Vater zunächst einen Nutzen von 1 , wenn es nicht übt, erhält er 0 . Bekommt das Kind kein Eis, fängt es an zu weinen. Dies schmerzt auch den Vater, und er erhält einen zusätzlichen Nutzen von -1 . Bekommt hingegen das Kind ein Eis, so erhält der Vater einen zusätzlichen Nutzen von 0 .

- (a) Zeige, dass es ein Nash-Gleichgewicht gibt, in dem der Vater seine Ankündigung wahr machen würde, und das Kind übt.
- (b) Ist die Ankündigung glaubwürdig? Warum bzw. warum nicht?
- (c) Bestimme alle teilspielperfekten Nash-Gleichgewichte.
- (d) Der Vater stellt einen Hauslehrer an, dem er die Aushändigung des Eises überlässt. Der Hauslehrer hat kein Mitleid mit dem Kind, d.h. er bekommt immer den gleichen Nutzen, egal ob das Kind weint oder nicht. Zeige, dass es jetzt ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht gibt, in dem das Kind übt und Eis bekommt.

Aufgabe 6.2 Betrachte das folgende Spiel zwischen 3 hungrigen Löwen $i = 1, 2, 3$. Es gibt ein Schaf, das von genau einem Löwen gefressen werden kann. Wenn ein Löwe das Schaf frisst, wird er müde und kann von einem anderen Löwen gefressen werden. Doch dann wird auch dieser Löwe müde und kann vom nächsten Löwen gefressen werden. Einzig ein Löwe, der zuvor noch kein anderes Tier gefressen hat, ist sicher davor, selber gefressen zu werden. Jeder Löwe hat die folgende Nutzenfunktion: Bleibt ein Löwe hungrig, so erhält er 0 . Wird er von einem anderen Löwen gefressen, erhält er -1 . Frißt er ein anderes Tier (Schaf oder Löwe) und wird nicht selber gefressen, so erhält er 1 .

Das Spiel vollzieht sich wie folgt: Zuerst wird ein Löwe nach dem anderen gefragt, ob er das Schaf fressen will. Falls alle ablehnen, endet das Spiel. Andernfalls frißt der erste Löwe, der “ja” geantwortet hat, das Schaf und wird müde. Danach werden wiederum alle Löwen nacheinander gefragt, ob sie den müden Löwen fressen wollen. So geht das Spiel weiter bis entweder auf einer Stufe es alle Löwen ablehnen, den müden Löwen zu fressen, oder bis ein einziger Löwe übrig bleibt.

- (a) Löse dieses Spiel unter vollkommener Information durch Rückwärtsinduktion.
- (b) Was passiert mit 4 Löwen (bzw. für eine allgemeine Anzahl N von Löwen)?

Aufgabe 6.3 Ein Verkäufer, V, und ein Käufer, K, wollen miteinander handeln. Der Verkäufer produziert ein Gut, dessen Qualität er beeinflussen kann durch eine Investition $q \geq 0$. Die Investition q resultiert in einer Qualität q . K kann die Qualität des Gutes beobachten. Wenn er das Gut zu einem Preis p kauft, ist sein Nutzen $q - p$, und V erzielt einen Nutzen von $p - q^2$. (q^2 sind die Kosten der Investition.) Falls nicht gehandelt wird, erzielt K den Nutzen 0, und V bekommt $-q^2$. Das Spiel vollzieht sich wie folgt: Zuerst wählt V die Investition q . Auf Stufe 2 beobachten beide Spieler die Qualität und ein Spieler macht ein Preisangebot p . Nachdem der andere Spieler das Angebot gesehen hat, nimmt er entweder an oder lehnt ab. Nimmt er an, findet der Handel zum Preis p statt. Lehnt er ab, findet kein Handel statt, und das Spiel endet.

(a) Bestimme q im teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht, wenn auf Stufe 2 K das Preisangebot macht.

(b) Bestimme q im teilspielperfekten Nash-Gleichgewicht, wenn auf Stufe 2 V das Preisangebot macht und vergleiche mit (a)

Aufgabe 6.4 Betrachte das folgende multilaterale Ultimatum Verhandlungsspiel. Es gibt zwei Verkäufer, V1, V2, und einen Käufer K. V1 und V2 besitzen jeweils ein für sie wertloses Gut, für das K jeweils die Wertschätzung von 1 hat. K hat Geld und kauft höchstens ein Gut. Die Verhandlungen verlaufen wie folgt. Zuerst macht V1 ein Angebot $p_1 \in [0, 1]$. Nachdem V2 das Angebot beobachtet hat, macht er ein Angebot $p_2 \in [0, 1]$. K beobachtet beide Angebote und entscheidet, ob er das Angebot von V1 oder von V2 oder keines der Angebote annimmt. Nimmt K das Angebot von V_i an, erhält K den Nutzen $1 - p_i$, V_i erzielt den Nutzen p_i , und der andere Verkäufer erzielt den Nutzen 0. Wenn K kein Angebot annimmt, erhalten alle Spieler den Nutzen 0.

- (a) Zeichne den Spielbaum und bestimme die möglichen Strategien für alle Spieler.
- (b) Bestimme die optimale Strategie von V2 unter der Annahme, dass K das Angebot von V2 annimmt, wenn K indifferent zwischen beiden Angeboten ist, und es sich für ihn lohnt, ein Angebot anzunehmen.
- (c) Zeige, dass es ein teilspielperfektes Nash-Gleichgewicht, in dem K den ganzen Kuchen bekommt, also einen Nutzen von 1 erzielt.
- (d) Gibt es noch weitere teilspielperfekte Nash-Gleichgewichte?