Vorlesungsnotizen

Einführung: Gegenstand der Vertragstheorie

- Die Vertragstheorie entsteht aus einer Kritik am bzw. in Abgrenzung zum allgemeinen Gleichgewichtsmodell der (Neo-)Klassik.
- Eine der zentralen Einsichten der neoklassischen Theorie ist, dass Wettbewerbsmärkte zu einer effizienten Allokation von Ressourcen führen.
  - ⋄ Sprich: der Preismechanismus zusammen mit Nutzenmaximierung der Haushalte und Gewinnmaximierung der Unternehmen sorgen dafür, dass alle Ressourcen in ihre produktivste Verwendung fließen.
- Historisch knüpfen hier zwei Kritikpunkte an:
  - ⋄ Die erste Kritik zielt darauf ab, dass das neoklassiche Bild der Unternehmung unvollständig ist, indem es von der inneren Organisation von Unternehmen abstrahiert.
    - ◦ Daraus entwickelte sich die sogenannte Prinzipal–Agenten–Theorie.
  - ⋄ Der zweite Kritikpunkt zielt darauf ab, dass die Neoklassik nur schwer die Existenz von Unternehmen erklären kann.
    - ◦ Daraus entwickelte sich die sogenannte Institutionenökonomik.
- Heutzutage sind Prinzipal–Agenten Theorie und Institutionenökonomik nicht mehr voneinander zu trennen.

Prinzipal–Agenten Theorie

- Ein erster Kritikpunkt am neoklassischen Modell ist, dass es die Unternehmung als “Black Box” betrachtet:
  - ⋄ Es betrachtet die Unternehmung als gewinnmaximierende Einheit und abstrahiert von der inneren Organisation der Unternehmung.
  - ⋄ Die Frage, wie es gelingt, verschiedene Mitarbeiter mit konfligierenden Interessen zu motivieren, im Firmeninteresse zu handeln, wird nicht explizit aufgeworfen.
- Für ein realistischeres bzw. besseres Verständnis von Unternehmen ist das folgende Problem zentral:
  - ⋄ Eigentümer stellen Manager bzw. Arbeitnehmer ein und delegieren Aufgaben an diese,

und zwar genau deshalb, weil sie spezialisiert sind.

- Z.B. haben sie mehr Zeit, bessere Fähigkeiten, oder besseres Wissen.

- Gleichzeitig haben Angestellte in der Regel andere Interessen als der Eigentümer.
  - So will ein Manager z.B. eher prestige- statt gewinnträchtige Projekte durchführen.
  - Ein Arbeiter hat höhere Kosten, je sorgfältiger er arbeitet.
  - ...
- Gerade aufgrund ihrer Spezialisierung erwächst jedoch Angestellten Spielraum, ihre eigenen Interessen zu verfolgen.
  - Weil ein Manager sich auskennt, muss man ihm die Projektwahl überlassen.
  - Je spezialisierter eine Aufgabe, umso eher kann man mangelnde Sorgfalt verheimlichen.
- Arrow (1963): by definition the agent has been selected for his special knowledge and the principal can never hope to completely check the agent's performance.

- Die Notwendigkeit, Aufgaben an spezialisierte Akteure zu delegieren, führt also zu einem Kontrollverlust auf Seiten des Delegierenden.
  - Dies generiert potentiell Anreize für die Akteure, ihre Kompetenz eigennützig zu "missbrauchen".
- Dieses fundamentale Problem wird auch als das "Prinzipal–Agent–Problem" bezeichnet.
  - Hier ist der Prinzipal derjenige, der delegiert, und der Agent derjenige, an den delegiert wird.

Institutionenökonomik

- Ein schon früh aufgeworfener Kritikpunkt an der neoklassischen Sicht ist, dass sich so nur schwer die Existenz von Unternehmen erklären lässt:
- So beobachtet Coase (1937)[1], dass innerhalb von Unternehmen Ressourcen nicht durch Preise und Wettbewerb, sondern durch Direktive und Autorität alloziiert werden.
  - Coase spricht von Unternehmen als Inseln, auf denen der Preismechanismus außer Kraft gesetzt ist.

[1] Coase, R. H., 1937, The Nature of the Firm, Economica 4, 386-405.

- Wenn der Preismechanismus die beste Art ist, Ressourcen zu alloziieren, stellt sich die Frage, warum dies dann nicht innerhalb von Unternehmen der Fall ist, bzw. warum es dann nicht lediglich atomisierte Produktionseinheiten gibt.
- Coase’ Erklärungsansatz ist, dass der Preismechanismus nicht kostenfrei ist.
  - ◇ Vielmehr verursacht jede Transaktion über den Markt sogenannte Transaktionskosten.
- Transaktionskosten entstehen aus verschiedenen Gründen:
  - ◇ Preise müssen ausgehandelt werden (bzw. nach den besten Preisen muss gesucht werden).
  - ◇ Lieferverträge müssen ausgearbeitet werden.
  - ◇ Jemand muss sicher stellen, dass Lieferbedingungen eingehalten worden sind.
  - ◇ ...
- Coase erklärt die Existenz von Unternehmen durch die Existenz von Transaktionskosten:
  - ◇ Transaktionen mit hohen Markttransaktionskosten werden effizienter nicht über den Markt, sondern innerhalb einer Unternehmung via Direktive durchgeführt.
    - ∘ hochspezialisierte Güter/Inputs, flexible Zuteilung von Aufgaben, ...
  - ◇ Umgekehrt ist der Markt effizienter als Direktive, wenn die Transaktionskosten gering sind.
    - ∘ standardisierte Konsumgüter.
- In Nachfolge von Coase werden Transaktionskosten als fundamental nicht nur für die Existenz von Unternehmen angesehen, sondern für jegliche Form ökonomischer Institutionen.
  - ◇ Institutionen (genauer: Nicht-Markt-Institutionen) sind das Resultat eines Bestrebens, den Nutzen ökonomischer Transaktionen mit möglichst minimalen Transaktionskosten zu realisieren.
- Die klassischen institutionsökonomischen Theorien sind im wesentlichen verbal und nicht formal.
- Modern werden Transaktionskosten als Kosten interpretiert, welche wesentlich aus Informationsproblemen, und hier insbesondere dem sogenannten Verifizierbarkeitsproblem heraus, resultieren.
  - ◇ So bestehen etwa die Transaktionskosten bei der Überprüfung, ob ein Lieferant die richtige Qualität geliefert hat, unter anderem darin, vor Gericht dessen mangelnde Sorgfalt zu beweisen.

  - ⋄ Dies wiederum ist nur dann möglich, wenn Qualität von einem Dritten überprüft (verifiziert) werden kann.

- Somit kann das Problem der Minimierung von Transaktionskosten als ein Prinzipal–Agent Problem verstanden werden.
  - ⋄ Der Prinzipal delegiert hier eine Aufgabe an einen Agenten, deren Resultat nicht vollständig verifizierbar ist.
  - ⋄ Dies eröffnet dem Agenten Spielraum zu eigennützigem ("opportunistischem") Verhalten.

Vertragstheorie als Analyse von Prinzipal–Agent Problemen

- Das Prinzipal–Agent Problem ist der Ausgangspunkt der modernen Vertragstheorie.
- Die Vertragstheorie untersucht, zu welchen ökonomischen Ineffizienzen das Prinzipal–Agent Problem führt, und wie diese Ineffizienzen am besten gemildert werden können (bzw. ob überhaupt).
- Das Problem der Spezialisierung tritt wesentlich als Informationsproblem in drei Ausprägungen auf.
  - ⋄ Der Agent hat private Information über seine Kosten, Produktivität, etc.
    - ∘ Adverse Selektion.
  - ⋄ Der Agent hat private Information darüber, ob er sich anstrengt, wie lange, sorgfältig er arbeitet etc.
    - ∘ Moral Hazard (Moralisches Risiko).
  - ⋄ Prinzipal und Agent haben Zugang zur selben Information, aber kein Dritter kann diese Information überprüfen (z.B. wie gut der Agent gearbeitet hat).
    - ∘ Nicht–Verifizierbarkeit.
- Das Prinzipal–Agent Problem wurde ursprünglich im Kontext von Unternehmen formuliert. Verwandte Prinzipal–Agent Probleme treten aber in einer schier unbegrenzten Fülle von Anwendungen und Fragestellungen auf:
  - ⋄ Verkauf eines Gutes an Konsumenten, die private Information über ihre Zahlungsbereitschaft haben.
  - ⋄ Regulierung eines Monopolisten, der private Information über seine Kostenstruktur hat.
  - ⋄ Regulierung einer Bank, die private Information über ihr Portfolio hat und deren

Anlageverhalten nicht beobachtbar ist.

◇ Sicherstellung von Produktqualität, wenn die Sorgfalt des Herstellers nicht beobachtbar ist.

◇ Kreditvergabe an einen Unternehmer, dessen Investitionsverhalten nicht beobachtbar ist.

◇ Finanzberatung durch einen Makler, der bessere Information über den Markt verfügt und möglicherweise Provision für bestimmte Produkte kassiert.

◇ Lieferung eines hochspezialisierten Produktes, z.B. Input, dessen Qualität nur die beteiligten Parteien beurteilen können.

◇ Politik"beratung" durch Lobbyisten, die private Information über die Auswirkungen eines Gesetzes besitzen.

◇ Bewilligung eines Antrages durch ein Kommittee, dessen Mitglieder Information über die Qualität des Antrages haben.

◇ Vertretung durch einen Anwalt, der private Information über die Erfolgsaussichten des Falles hat.

◇ Besteuerung zu Zwecken der Umverteilung, wenn Vermögen oder Einkommen private Information ist.

◇ Verteilung von Gehirnressourcen an die einzelnen Module im Gehirn.

• Die Vertragstheorie hat sich somit mittlerweile von der Frage der Unternehmensorganisation gelöst.

◇ In diesem Sinne ist die Vetragstheorie keine Theorie über ein bestimmtes ökonomisches Problem, sondern mehr ein Werkzeug zur Analyse von Prinzipal–Agenten–Problemen.

Methodik

• Im Zentrum einer vertragstheoretischen Analyse steht die Suche nach einem (in einem bestimmten Sinne) optimalen Vertrag für ein gegebenes Prinzipal–Agenten Problem.

• Dabei ist ein Vertrag ein Regelwerk, welches die Transaktion der Parteien steuert.

◇ Ein Lohnvertrag spezifiziert eine Zahlung an den Agenten z.B. in Abhängigkeit seiner Arbeitsdauer oder des erzielten Outputs.

◇ Andere Arbeitsverträge könnten z.B. Karrierestufen in Abhängigkeit von Leistung spezifizieren.

  - ⋄ Ein Kaufvertrag spezifiziert einen Preis in Abhängigkeit einer Menge oder Qualität.

- Dabei werden die beiden folgenden grundlegenden Annahmen gemacht.

  1. Der Prinzipal offeriert einen Vertrag. Lehnt der Agent ab, kommt es zu keiner Transaktion.

  2. Verletzt eine Partei die Vertragsbedingungen, so wird sie von der anderen vor Gericht gebracht, und dieses setzt dann den Vertrag (gnadenlos) durch.

  - ⋄ Beide Annahmen isolieren die Art und Weise, wie das Prinzipal–Agent Problem als solches die ökonomische Transaktion beeinflußt.
  - ⋄ Durch die erste Annahme können wir von Verteilungsaspekten abstrahieren.
    - ∘ Werden sehen, wann und inwiefern das gerechtfertigt ist.
  - ⋄ Durch die zweite Annahme garantieren wir, dass unsere Resultate ökonomisch getrieben sind, und nicht durch Unvollkommenheiten im Rechtssystem.
    - ∘ Abschwächungen dieser Annahme werden in “Law and Economics” diskutiert.

- Jeder Vertrag induziert eine bestimmte Nutzenfunktion des Agenten und damit ein bestimmtes Verhalten.
  - ⋄ Ein Vertrag setzt somit Verhaltensanreize für den Agenten.

- Da der Prinzipal den Vertrag gestaltet, kann er das Verhalten des Agenten beeinflussen und so dem Kontrollverlust entgegenwirken.

- Ein optimaler Vertrag ermöglicht die (im Sinne einer bestimmten Zielfunktion) beste Allokation von zur Verfügung stehenden Ressourcen.

- Eine der zentralen Erkenntnisse der Vertragstheorie ist die Einsicht, dass die Notwendigkeit, Anreize zu schaffen, die Menge der zu erreichenden Allokationen in einem ähnlichen Sinne einschränkt, wie dies technologische Beschränkungen tun.
  - ⋄ In diesem Sinne sind Informationsasymmetrien eine weitere Ursache von Knappheit.

- Formal werden diese sogenannten Anreizverträglichkeitsbedingungen in den Nebenbedingungen des Optimierungsproblems erfasst.
  - ⋄ Das mathematische Werkzeug der Vertragstheorie sind damit Techniken der Optimierung unter Nebenbedingungen.

- Grundsätzlich definiert ein Vertrag ein “Spiel” zwischen Prinzipal und Agent.
  - ⋄ Durch die Vertragsgestaltung versucht der Prinzipal dem Agenten Anreize zu geben, eine bestimmte Strategie zu spielen.
  - ⋄ Der Prinzipal selbst verpflichtet sich üblicherweise als “Stackelbergführer” zu einer Strategie. Daher reduziert sich das Spiel häufig auf ein Entscheidungsproblem des Agenten.
  - ⋄ Bei Prinzipal–Agent Problemen mit mehr als einem Agenten ist dies nicht der Fall. Um die Anreizwirkung von Verträgen zu untersuchen, werden dann spieltheoretische Lösungskonzepte herangezogen.

Erklärungsbeitrag

- Die Vertragstheorie kann zu positiver wie normativer Analyse herangezogen werden.
- Die positive Analyse versucht reale Verträge bzw. Institutionen zu erklären.
  - ⋄ Hier wird unterstellt, dass reale Verträge dem Optimierungskalkül eines Prinzipals entspringen.
- Die normative Analyse fragt, was in einer bestimmten Situation der wohlfahrtsoptimale Vertrag ist im Sinne einer bestimmten Wohlfahrtsfunktion.
  - ⋄ Daraus lassen sich Politikempfehlungen an die Politik ableiten, etwa im Hinblick auf Regulierungs- oder Umverteilungsfragen.

Verwandte Fragestellungen

- Die Grundprobleme der Vertragstheorie wie Adverse Selektion oder Moral Hazard sind nicht nur für Prinzipal–Agenten–Beziehungen relevant.
  - ⋄ Adverse Selektion und Moral Hazard spielen auch auf Märkten eine wichtige Rolle.
    - ∘ Auf Versicherungsmärkten haben die Versicherten private Information über ihr Schadensrisiko.
    - ∘ Verkäufer haben oftmals private Information über die Qualität ihres Produkts (Gebrauchtwagen).
    - ∘ Die Qualität eines Produkts wird durch die Sorgfalt des Herstellers bestimmt.
  - ⋄ Das Gebiet des “Mechanismus Design” erweitert die Vertragstheorie auf Situationen, in denen es mehrere Agenten gibt.

- ◦ Auktionen;
- ◦ Optimale Bereitstellung öffentlicher Güter;
- ◦ Wahlen.
- ◦ Optimale Lohnanreizschemata für Teams;
- ◦ ...

Diese Vorlesung

- In dieser Vorlesung betrachten wir im wesentlichen Prinzipal–Agent Modelle mit einem Agenten.
  - ⋄ Dabei konzentrieren wir uns auf die (möglichen) Ineffizienzen, die entstehen durch
    - ◦ Adverse Selektion;
    - ◦ Moral Hazard;
    - ◦ Nicht–Verifizierbarkeit.

Textbücher

- Laffont, J.-J. and D. Martimort: *The Theory of Incentives*.
- Bolton, P. and M. Dewatripont: *Contract Theory*.
- Schweizer, U.: *Vertragstheorie*.
- Salanie, B. *The Economics of Contracts*.
- Machot–Stadler, I. and J. D. Perez–Castrillo: *An Introduction to the Economics of Information: Incentives and Contracts*.
- Hart, O.: *Firms, Contracts, and Financial Structure*. (Nur bedingt relevant.)

1 Adverse Selektion

1.1 Das Grundmodell

- Es gibt einen Prinzipal und einen Agent.

1.1.1 Technologie und Präferenzen

- Der Agent kann eine Menge $q \geq 0$ eines Gutes zu marginalen Kosten $\theta \geq 0$ produzieren.
  - ⋄ Hierbei kann θ die Werte $\theta_L > 0$ oder $\theta_H > \theta_L$ annehmen.
  - ⋄ Die Wkt, dass der Agent vom Typ θ_L ist, sei $\nu \in [0,1]$.[2]
  - ⋄ Die Wkt, dass der Agent vom Typ θ_H ist, sei $1-\nu$.
  - ⋄ Wir bezeichnen θ auch als *Typ* des Agenten.
    - ∘ θ_L ist der "effiziente" Typ, θ_H der "ineffiziente" Typ.
- Der Prinzipal hat eine Wertschätzung $S(q)$ für die Menge q.
  - ⋄ Es gelte: $S(0)=0$, $S'>0$, $S''<0$ (positiver, abnehmender Grenznutzen).
  - ⋄ Außerdem gelte: $S'(0) > \theta_H$.
- Die Parteien haben *quasi–linearen Nutzen*, d.h. ihr Nettonutzen setzt sich zusammen aus (Brutto-) Nutzen/Kosten der Transaktion und Geld:
  - ⋄ Wird q produziert und erhält der Agent einen Geldtransfer t vom Prinzipal, dann beträgt der Nutzen für den Prinzipal und den Agent jeweils

$$\begin{aligned} u_P(q,t) &= S(q) - t, \\ u_A(q,t,\theta) &= t - \theta q. \end{aligned}$$

  - ⋄ Insbesondere ist Nutzen *transferierbar*: Durch Erhöhung (Reduktion) von t kann der Prinzipal den Nutzen des Agenten auf Kosten (zugunsten) seines eigenen erhöhen (senken).
- Falls es zu keiner Transaktion kommt, erhält jede Partei ihren *Reservationsnutzen* von $\bar{u}_P$ bzw. $\bar{u}_A$.
  - ⋄ $\bar{u}_P$ bzw. $\bar{u}_A$ werden auch als die *Alternativoptionen* der Parteien bezeichnet.

[2] ν ist das griechische "nü".

  ◇ Wir normieren $\bar{u}_P$ und $\bar{u}_A$ jeweils auf Null.

• Eine *Allokation* ist eine Kombination (q, t).

1.1.2 Information

• Wir nehmen an, dass—bis auf den Parameter θ—alle Größen allgemein bekannt sind (*common knowledge*).

  ◇ Die Parteien kennen $v, S, \bar{u}_P, \bar{u}_A$ und wissen, dass die andere Partei sie kennt,
  und wissen, dass die andere Partei weiß, dass die andere Partei sie kennt, usw.

• In Bezug auf θ unterscheiden wir zwei Fälle:

  ◇ Unter *symmetrischer* Informationsverteilung können Prinzipal und Agent θ beobachten.

  ◇ Unter *asymmetrischer* Informationsverteilung kann nur der Agent θ beobachten.

    ∘ Wir sagen: θ ist *private Information* des Agenten.

1.1.3 Verträge

• Ein Vertrag ist eine rechtlich bindende Vereinbarung zwischen Prinzipal und Agent, dass ...

  ◇ der Agent eine Menge q liefert, und

  ◇ der Prinzipal t zahlt.

• Mit rechtlich bindend ist gemeint, dass es ein Gericht gibt, welches die Vereinbarung durchsetzt, sollte eine Partei versuchen, sie zu brechen.

  ◇ Dies bedeutet, dass die Wahl von q und t nicht mehr der freien Entscheidung der Parteien unterliegt,
  nachdem ein Vertrag unterschrieben ist.

  ◇ Damit ein Gericht den Vertrag durchsetzen kann, müssen q und t
  öffentlich beobachtbar und verifizierbar sein.

    ∘ Wir sagen: q und t sind *kontrahierbar*.

  ◇ Konsequenz: ein geschlossener Vertrag kann nicht gebrochen werden!

• [Es ist auch eine Situation vorstellbar, in der etwa q nicht kontrahierbar ist, z.B., wenn $q =$ Qualität.

  ◇ Dann könnte q nicht Bestandteil eines Vertrages sein; ein Vertrag bestünde nur aus einer Zahlung t.

◇ In diesem Fall würde q nicht vertraglich bestimmt, sondern durch die freie Wahl des Agenten.

◇ Wir werden auf diesen Fall zurück kommen.]

• Dass Mengen und Preise kontrahierbar sind, ist eine *implizite* Annahme in der allgemeinen Gleichgewichtstheorie.

◇ In der Vertragstheorie werden Kontrahierbarkeitsannahmen immer explizit gemacht.

1.1.4 Optimaler Vertrag

• Im Prinzip stellen wir uns eine Situation vor, in der der Prinzipal und der Agent einen Vertrag aushandeln.

• Die einfachste Art, dies zu modellieren, ist anzunehmen, dass der Prinzipal die volle Verhandlungsmacht hat.

◇ Dies ist häufig nicht unrealistisch.

◇ In vielen Fällen ist dies auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit in dem Sinne, dass sich der Vertrag nur unwesentlich verändern würde, hätte auch der Agent Verhandlungsmacht.

• Der Prinzipal macht dem Agent also ein “take–it or leave–it” Angebot, indem er einen Vertrag vorschlägt.

◇ Nimmt der Agent an, wird der Vertrag durchgeführt.

◇ Lehnt der Agent ab, kommt es zu keiner Transaktion; beide Parteien erhalten ihre Alternativoptionen.

◇ Spieltheoretisch agiert der Prinzipal also als Stackelbergführer.

• Damit ist der resultierende Vertrag der sogenannte optimale Vertrag, der den Nutzen des Prinzipals maximiert.

1.1.5 Zeitablauf

• Die Interaktion zwischen Prinzipal und Agent vollzieht sich wie folgt:

1. Der Parameter θ realisiert sich.

◇ Unter symmetrischer Information beobachten Prinzipal und Agent θ.

◇ Unter asymmetrischer Information beobachtet nur der Agent θ.

2. Der Prinzipal offeriert einen Vertrag.

3. Der Agent nimmt an oder lehnt ab.
   - ⋄ Falls er ablehnt, erhalten beide Parteien ihre Alternativoptionen.
   - ⋄ Falls er annimmt, wird der Vertrag implementiert.

1.2 Symmetrische Informationsverteilung

- Nehmen wir zunächst an, dass beide Parteien θ beobachten können.

1.2.1 Referenzfall: First–Best

- Abstrahieren wir zunächst von allen Vertragsproblemen und fragen uns, was die beste denkbare Allokation ist.
  - ⋄ Der Vergleich mit diesem Referenzfall gestattet es uns dann, Friktionen zu identifizieren, welche durch das Vertragsproblem ausgelöst werden.
- Mit transferierbarem Nutzen ist die beste Allokation diejenige, welche die Summe der Nutzen aller Parteien maximiert.
  - ⋄ Die Summe der Nutzen stellt den *Handelsüberschuss* dar (synonym: “Überschuss”, “Handelsgewinne”, “Kuchen”):

$$(S(q) - t) + (t - \theta q) = S(q) - \theta q.$$

  - ⋄ Der Überschuss hängt offensichtlich nicht von der Höhe des Transfers ab.
- Wir bezeichnen die überschussmaximierende Menge als First–Best Menge $q^{FB}(\theta)$.
  - ⋄ Aufgrund der Annahmen an S ist $q^{FB}(\theta)$ positiv und eindeutig durch die Bedingung erster Ordnung bestimmt:

$$S'(q^{FB}) - \theta = 0$$

  - ⋄ Grenznutzen = Grenzkosten.
  - ⋄ Der First–Best Transfer t^{FB} kann beliebig gewählt werden. Er legt lediglich die Aufteilung des Kuchens fest, beeinflusst aber nicht dessen Größe!
  - ⋄ Insbesondere kann jede Aufteilung durch einen entsprechenden Transfer erreicht werden.

- Wir schreiben auch $q_H^{FB} = q^{FB}(\theta_H)$, $q_L^{FB} = q^{FB}(\theta_L)$.
  - Beachte: $q_L^{FB} > q_H^{FB}$.

1.2.2 Optimaler Vertrag unter symmetrischer Informationsverteilung

- Der optimale Vertrag kann durch Rückwärtsinduktion ermittelt werden.
- Auf Stufe 3 akzeptiert der Agent den Vertrag (q, t), wenn

$$t - \theta q \geq \bar{u}_A = 0.$$

- Das Maximierungsproblem für den Prinzipal auf Stufe 2 ist also:

$$\max_{q,t} S(q) - t \quad \text{s.d.} \quad t - \theta q \geq 0.$$

- Im Optimum muss die Nebenbedingung bindend sein: $t - \theta q = 0$.
  - Andernfalls wäre eine kleine Reduktion von t profitabel.
- Setzen wir die Nebenbedingung in die Zielfunktion ein, so ergibt sich aus den Annahmen an S, dass die optimale Menge durch die Bedingung erster Ordnung bestimmt ist:

$$S'(q) - \theta = 0.$$

  - Dies ist die gleiche Bedingung wie für die First–Best Menge.

LEMMA 1.1 *Unter symmetrischer Information gilt für den optimalen Vertrag $(q^{VI}(\theta), t^{VI}(\theta))$: Die optimale Menge im Zustand θ ist durch die First–Best Menge $q^{VI}(\theta) = q^{FB}(\theta)$ gegeben. Der optimale Transfer ist gerade so, dass der Agent gerade seine Alternativoption, also einen Nutzen von Null, bekommt: $t^{VI}(\theta) = \theta q^{FB}(\theta)$.*

- Unter symmetrischer Information ist der optimale Vertrag also First–Best effizient und maximiert den Gesamtüberschuss.
  - In diesem Sinne gibt es keine Friktionen.
- Der ökonomische Grund hierfür ist wie folgt:
  - Bei transferierbarem Nutzen teilen sich Prinzipal und Agent definitionsgemäß

den Gesamtkuchen untereinander auf.

◇ Das heißt, der Nutzen des Prinzipals ist gerade die Differenz aus dem Gesamtüberschuss und dem Nutzen des Agenten:

$$u_P(q,t) = [S(q,t,\theta) - \theta q] - u_A(q,t,\theta).$$

◇ Optimiert der Prinzipal, so versucht er also ...

∘ für gegebenen Kuchen, den Nutzen des Agenten möglichst klein zu halten; bzw.

∘ für gegebenen Nutzen des Agenten, den Kuchen zu maximieren.

◇ Unter symmetrischer Information und da er volle Verhandlungsmacht hat, kann der Prinzipal den Transfer so wählen, dass der Agent nicht mehr als seine Alternativoption bekommt.

◇ Den Rest des Kuchens schöpft der Prinzipal für sich ab.

◇ Es ist also optimal für ihn, einen Vertrag zu wählen, der den Gesamtkuchen möglichst groß macht, also den effizienten Vertrag.

1.3 Asymmetrische Informationsverteilung

• Nehmen wir nun an, dass nur der Agent seine marginalen Kosten θ beobachten kann.

1.3.1 Verträge mit Kommunikation

• Bei symmetrischer Information ist der optimale Vertrag vom Typ θ des Agenten abhängig.

◇ Daher ist die Information des Agenten für den Prinzipal wertvoll, und er würde auch nun gerne den Vertrag flexibel vom Typ des Agenten abhängig machen.

• Da der Prinzipal aber θ nicht kennt, kann er nicht einfach einen Vertrag (q_L, t_L) anbieten, wenn der Agent vom Typ θ_L ist, und einen anderen Vertrag (q_H, t_H), wenn der Agent vom Typ θ_H ist.

• Der Prinzipal könnte aber folgenden, erweiterten Vertrag anbieten:

◇ Er fordert den Agenten auf, seinen Typ mitzuteilen.

◇ Gleichzeitig verpflichtet er sich dazu,

∘ eine Allokation (q_L, t_L) zu implementieren, wenn der Agent θ_L mitteilt, und

  - ∘ eine Allokation (q_H, t_H) zu implementieren, wenn der Agent θ_H mitteilt.

- Ein solcher Vertrag ist dann möglich, wenn Mitteilungen seitens des Agenten kontrahierbar sind.
  - ⋄ Dies werden wir im folgenden annehmen.

- Wir bezeichnen einen solchen erweiterten Vertrag als *Vertrag mit direkter Kommunikation*, bzw. kurz als *direkten Vertrag*.
  - ⋄ Die Bezeichnung "direkt" wird später klar.

- **Beachte**: Der Agent kann *irgendeinen* Typ mitteilen:
  - ⋄ Der Agent kann also auch "lügen" und einen falschen Typ mitteilen!
  - ⋄ Denn da der Typ θ private Information ist, kann eine Lüge niemals entdeckt werden.
  - ⋄ De facto bestimmt der Agent durch seine Mitteilung die Allokation.

DEFINITION 1.1 *Ein Vertrag mit direkter Kommunikation ist eine Menge von Allokationen* $\Gamma = \{(q_L, t_L,), (q_H, t_H)\}$.

- Wenn der Prinzipal eine Allokation (q_L, t_L) für den Typ θ_L und eine Allokation (q_H, t_H) für den Typ θ_H implementieren will, dann muss er sicherstellen, dass der Agent seinen Typ wahrheitsgemäß offenbart, bzw. keinen Anreiz hat zu lügen.

- Dies ist dann der Fall, wenn jeder Typ die für ihn bestimmte Allokation gegenüber der anderen präferiert. Formal:

$$t_L - \theta_L q_L \geq t_H - \theta_L q_H, \tag{AV_L}$$

$$t_H - \theta_H q_H \geq t_L - \theta_H q_L. \tag{AV_H}$$

- Die Bedingungen (AV_L) und (AV_H) werden als *Anreizverträglichkeitsbedingungen* bezeichnet.
  - ⋄ Sie stellen sicher, dass der Agent einen Anreiz hat, seinen Typ wahrheitsgemäß zu offenbaren.
  - ⋄ Wäre z.B. (AV_L) verletzt, dann würde Typ θ_L den Typ θ_H mitteilen.
  - ⋄ Dann würde für beide Typen die Allokation (q_H, t_H) implementiert.
  - ⋄ Der Vertrag würde dann nicht flexibel auf die Information des Agenten konditionieren.

DEFINITION 1.2 *Ein direkter Vertrag Γ heißt anreizverträglich, wenn er die Bedingungen (AV_L) und (AV_H) erfüllt.*

- Um sicherzustellen, dass der Agent einen direkten, anreizverträglichen Vertrag annimmt, muss er jedem Typ mindestens seinen Reservationsnutzen liefern.
  - Da der Agent wahrheitsgemäß berichtet, ist dies der Fall, wenn gilt:

$$t_L - \theta_L q_L \geq 0, \qquad (IR_L)$$

$$t_H - \theta_H q_H \geq 0. \qquad (IR_H)$$

- Die Bedingungen (IR_L) und (IR_H) werden als *Partizipationsbedingungen* oder *Individuelle Rationalitätsbedingungen* bezeichnet.

DEFINITION 1.3 *Ein direkter, anreizverträglicher Vertrag Γ, heißt individuell rational, wenn er die Partizipationsbedingungen (IR_L) und (IR_H) erfüllt.*

- Ein direkter Vertrag, der anreizverträglich und individuell rational ist, heißt auch *zulässig*.
- Beispiel: der direkte Vertrag, der aus den unter symmetrischer Information optimalen Allokationen (q_i^{VI}, t_i^{VI}), $i \in \{L, H\}$, besteht, ist individuell rational, aber nicht anreizverträglich.

1.3.2 Optimaler direkter, zulässiger Vertrag

- Wir suchen nun nach dem optimalen Vertrag in der Klasse der zulässigen Verträge.
  - Im Prinzip könnten wir dem Prinzipal gestatten, einen Vertrag aus einer größeren Klasse von Verträgen auszuwählen.
  - Wir könnten z.B. Verträge mit Kommunikation mit mehr als zwei Mitteilungen betrachten.
  - Wir werden später sehen, dass der Prinzipal davon nicht profitieren kann.
- Bietet der Prinzipal einen direkten, zulässigen Vertrag an, so beträgt sein Nutzen
  - ... $S(q_L) - t_L$, wenn der Agent vom Typ θ_L ist;
  - ... $S(q_H) - t_H$, wenn der Agent vom Typ θ_H ist.

- Das Problem des Prinzipals besteht darin, einen direkten Vertrag zu finden, der seinen Erwartungsnutzen maximiert unter der Nebenbedingung, dass der Vertrag anreizverträglich und individuell rational ist. Wir bezeichnen dieses Problem mit P.

$$
\begin{aligned}
P: \quad & \max_{(q_L,t_L),(q_H,t_H)} && \nu(S(q_L)-t_L)+(1-\nu)(S(q_H)-t_H) \quad s.d. \\
AV_L: \quad & && t_L-\theta_L q_L \geq t_H-\theta_L q_H, \\
AV_H: \quad & && t_H-\theta_H q_H \geq t_L-\theta_H q_L, \\
IR_L: \quad & && t_L-\theta_L q_L \geq 0, \\
IR_H: \quad & && t_H-\theta_H q_H \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Im Prinzip könnte man dieses Problem nach Schema F mithilfe des Satzes von Kuhn–Tucker lösen.
  - ⋄ Wir werden jedoch hier (und zumeist in der Vorlesung) anders vorgehen.
  - ⋄ Wir verfolgen den Ansatz, die Nebenbedingungen zu vereinfachen, und diejenigen zu identifizieren, die im Optimum binden.
- Wir schreiben zunächst das Problem etwas um:
  - ⋄ Für gegebene Mengen induzieren die Transfers eine Aufteilung des Handelsüberschusses zwischen Prinzipal und Agent.
  - ⋄ Indem der Prinzipal also die Transfers festlegt, legt er somit indirekt den Nutzen des Agenten fest.
  - ⋄ Dann kann er aber auch gleich den Nutzen des Agenten direkt festlegen, weil es immer Transfers gibt, die diesen Nutzen induzieren.
  - ⋄ Anders formuliert: anstatt in Geldeinheiten kann der Vertrag genauso gut in entsprechenden Nutzeneinheiten nominiert sein.
- Für Mengen q_L und q_H seien

$$u_L = t_L - \theta_L q_L, \qquad u_H = t_H - \theta_H q_H$$

die Nutzen der beiden Agenten-Typen aus einem gegebenen Vertrag Γ.

  - ⋄ Wir bezeichnen u_L und u_H auch als die *(Informations-)Rente des Agenten*.

- Die Zielfunktion lautet dann

$$\nu(S(q_L) - \theta_L q_L - u_L) + (1-\nu)(S(q_H) - \theta_H q_H - u_H).$$

  - ⋄ Nutzen des Prinzipals = Überschuss – Nutzen des Agenten.

- Die Nebenbedingungen lauten

$$\begin{aligned} AV_L' : &\qquad u_L \geq u_H + (\theta_H - \theta_L) q_H, \\ AV_H' : &\qquad u_H \geq u_L - (\theta_H - \theta_L) q_L, \\ IR_L' : &\qquad u_L \geq 0, \\ IR_H' : &\qquad u_H \geq 0. \end{aligned}$$

- Der Prinzipal optimiert nun nicht mehr über $(q_L, t_L), (q_H, t_H)$, sondern über $(q_L, u_L), (q_H, u_H)$.
- Um das Problem des Prinzipals zu verstehen, betrachten wir zunächst zwei spezifische Verträge.
- Um die Rente des Agenten möglichst gering zu halten, kann der Prinzipal einen Vertrag mit $u_H = u_L = 0$ anbieten.
  - ⋄ Wegen (AV_L') gilt dann $q_H = 0$ und damit ist der Überschuss im Zustand θ_H gleich Null.
  - ⋄ Der Prinzipal kann also die Rente nur dann auf Null setzen, wenn er auf einen Handelsüberschuss im Zustand θ_H völlig verzichtet.
- Um den Handelsüberschuss zu maximieren, kann der Prinzipal einen Vertrag wählen mit den First–Best Mengen $q_L = q_L^{FB}$ und $q_H = q_H^{FB}$.
  - ⋄ Dann muss er aber dem effizienten Typen θ_L eine strikt positive Rente bezahlen.
  - ⋄ Dies folgt aus AV_L' und IR_L', da $q_H^{FB} > 0$.
- Allgemeiner: Sobald der Prinzipal einen positiven Überschuss im Zustand θ_H erwirtschaften will, muss er dem effizienten Typen θ_L eine strikt positive Rente bezahlen.
  - ⋄ Im Unterschied zum Fall mit symmetrischer Information, kann der Prinzipal bei asymmetrischer Information den Überschuss nicht mehr vollständig abschöpfen.
- Intuitive Erklärung:

- ⋄ Der effiziente Typ produziert günstiger als der ineffiziente Typ: $\theta_L < \theta_H$.
- ⋄ Bei einer Produktion von $q_H > 0$ erzielt der effiziente Typ also einen echt höheren Nutzen als der ineffiziente Typ.
- ⋄ Da schon der ineffiziente Typ mindestens eine Rente von Null bekommen muss (wegen IR), muss der effiziente Typ einen echt positive Nutzen bekommen, wenn er $q_H > 0$ produziert.
- ⋄ Da θ aber *private* Information ist, kann der effiziente Typ immer *vorgeben*, er sei der ineffiziente Typ, $q_H > 0$ produzieren und sich also damit einen echt positiven Nutzen sichern.
- ⋄ Somit muss in einem Vertrag mit $q_H > 0$ der effiziente Type eine positive Rente bekommen.

• Diese Überlegungen legen folgendes nahe:

- ⋄ Bei symmetrischer Information kann der Prinzipal den gesamten Überschuss abschöpfen.
- ⋄ Ausgehend von $q_H = 0$ erhöht er also die Menge so lange bis Grenznutzen = Grenzkosten.
- ⋄ Unter asymmetrischer Information muss der Prinzipal von jeder Einheit zusätzlichen Überschusses, welche eine Erhöhung von q_H nach sich zieht, einen Teil als Rente an den effizienten Typen abtreten.
- ⋄ Aus Sicht des Prinzipals ist es, als hätte eine Erhöhung von q_H nun zusätzliche Kosten.
- ⋄ Daher wird er die Menge q_H nicht so weit ausdehnen wie im Fall mit symmetrischer Information.

• Durch asymmetrische Information entsteht für den Prinzipal ein Zielkonflikt zwischen Maximierung des Überschusses und Minimierung der Rente.

- ⋄ ("trade–off between efficiency and rent extraction".)

• Wir werden diese Intuition nun formal bestätigen.

• Wiederholen wir noch einmal das Problem des Prinzipals, nunmehr bezeichnet mit P':

$$
\begin{aligned}
P': \quad & \max_{(q_L,u_L),(q_H,u_H)} \quad \nu(S(q_L)-\theta_L q_L - u_L) + (1-\nu)(S(q_H)-\theta_H q_H - u_H) \quad s.d. \\
AV_L': \quad & u_L \geq u_H + (\theta_H - \theta_L) q_H, \\
AV_H': \quad & u_H \geq u_L - (\theta_H - \theta_L) q_L, \\
IR_L': \quad & u_L \geq 0, \\
IR_H': \quad & u_H \geq 0.
\end{aligned}
$$

• Wie angesprochen, überlegen wir zuerst, welche Nebenbedingungen im Optimum binden.

LEMMA 1.2 *(i) Sei $\{(q_L, u_L), (q_H, u_H)\}$ ein zulässiger Vertrag. Dann gilt:*

◇ $q_L \geq q_H$.

(ii) Sei $\{(q_L, u_L), (q_H, u_H)\}$ ein optimaler zulässiger Vertrag. Dann gilt zusätzlich:

◇ *Die Anreizverträglichkeitsbedingung (AV_L') des effizienten Typen bindet:* $u_L = u_H + (\theta_H - \theta_L)q_H$.

◇ *Die Partizipationsbedingung (IR_H') des ineffizienten Typen bindet:* $u_H = 0$.

◇ *Alle anderen Nebenbedingungen sind automatisch erfüllt.*

• Aufgrund des Lemmas ist das Problem des Prinzipals äquivalent zu

$$\max_{(q_L,u_L),(q_H,u_H)} \quad \nu(S(q_L) - \theta_L q_L - u_L) + (1-\nu)(S(q_H) - \theta_H q_H - u_H) \quad s.d.$$

$$q_L \geq q_H,$$

$$u_L = u_H + (\theta_H - \theta_L)q_H,$$

$$u_H = 0.$$

• Wir betrachten zunächst ein "abgeschwächtes" Problem, bei dem wir die Monotoniebedingung $q_L \geq q_H$ ignorieren.

◇ Wir hoffen, dass diese dann automatisch erfüllt ist.

• Setzen wir die beiden bindenden Nebenbedingungen in die Zielfunktion ein, so schreibt sich diese als

$$\nu(S(q_L) - \theta_L q_L) + (1-\nu)(S(q_H) - \{\theta_H + \frac{\nu}{1-\nu}(\theta_H - \theta_L)\}q_H).$$

◇ Diese Funktion hängt nur noch von q_L und q_H ab! Nicht mehr von u_L oder u_H.

◇ Der Prinzipal hat, für gegebene Mengen q_L und q_H, keinen Spielraum mehr, u_L oder u_H zu wählen. Diese sind durch die Nebenbedingungen eindeutig festgelegt (im Optimum).

◇ Wir haben also ein unbeschränktes Optimierungsproblem erhalten.

• In Bezug auf q_L entspricht die Zielfunktion gerade dem Gesamtüberschuss im Zustand θ_L.

• In Bezug auf q_H jedoch entspricht die Zielfunktion der Differenz aus Nutzen und—im Vergleich zu den tatsächlichen Produktionskosten—nun erhöhten Produktionskosten.

◇ Aus Sicht des Prinzipal sind die marginalen Kosten der Produktion nicht θ_H, sondern $\theta_H + \frac{\nu}{1-\nu}(\theta_H - \theta_L)$.

  - ∘ Man nennt diese Kosten auch “virtuelle” Kosten.

- ⋄ Die zusätzlichen Kosten $\frac{\nu}{1-\nu}(\theta_H - \theta_L)$ fallen durch die Notwendigkeit an, dem effizienten Typ eine Informationsrente zu zahlen, bzw. dafür, dass der Agent seine private Information wahrheitsgemäß offenbart.

- Die virtuellen Kosten erfassen den Zielkonflikt des Prinzipals zwischen Maximierung des Überschusses und Minimierung der Rente.

- Lösen wir nun das abgeschwächte Optimierungsproblem, so ergeben die Bedingungen erster Ordnung, dass die resultierenden Mengen q_L^* und q_H^* automatisch monoton geordnet sind.
  - ⋄ Damit ist die Lösung also auch eine Lösung des Originalproblems.

LEMMA 1.3 *Für die Lösung* $(q_L^*, u_L^*), (q_H^*, u_H^*)$ *von* P' *gilt: (i) Die Menge des effizienten Typen entspricht der First–Best Menge:* $S'(q_L^*) = \theta_L$.

(ii) Die Menge des ineffizienten Typen ist kleiner als die First–Best Menge. Falls $S'(0) > \theta_H + \frac{\nu}{1-\nu}(\theta_H - \theta_L)$*, so ist* q_H^* *gegeben durch*

$$S'(q_H^*) = \theta_H + \frac{\nu}{1-\nu}(\theta_H - \theta_L). \tag{1}$$

Andernfalls gilt: $q_H^* = 0$.

(iii) Der ineffiziente Typ bekommt keine Informationsrente: $u_L^* = 0$. *Die Informationsrente des effizienten Typen beträgt:* $u_H^* = (\theta_H - \theta_L)q_H^*$.

- Eigenschaften
  - ⋄ Dass der effiziente Typ die First–Best Menge produziert, nennt man auch “no distortion at the top”.
  - ⋄ Die Menge für den ineffizienten Typen ist hingegen ineffizient niedrig, bzw. nach unten *verzerrt* (“distorted”).
    - ∘ Diese Ineffizienz resultiert aus der Informationsasymmetrie: durch die virtuellen Kosten wird Produktion im Zustand θ_H unrentabler.
    - ∘ Falls die marginalen virtuellen Kosten sehr hoch sind, wird die Produktion sogar völlig unrentabel, und es kommt zum “Produktionsstopp”.

- Interpretation
  - ⋄ Es ist wichtig zu verstehen, dass die Ineffizienz keine Ineffizienz im Sinne von Pareto–Ineffizienz ist.
  - ⋄ Ein sozialer Planer, der selbst θ nicht beobachten kann, kann diese Ineffizienz nicht beheben.
  - ⋄ In der Tat ist der optimale Vertrag Pareto–effizient unter den gegebenen Informationsbedingungen.
    - ∘ Es gibt keinen anderen zulässigen(!) Vertrag, welcher eine Partei besser stellen würde, ohne die andere schlechter zu stellen.
    - ∘ Es gibt zwar einen Vertrag, der die First–Best Menge implementiert und also einen größeren Gesamtkuchen schafft, aber dieser Vertrag geht mit höheren Informationsrenten einher, würde also den Prinzipal schlechter stellen.
  - ⋄ Daher sagt man auch, dass der optimale Vertrag *Second–Best effizient* bzw. *anreizeffizient* ist.
  - ⋄ Asymmetrische Information ist daher wie eine technologische Beschränkung zu sehen, welche die Fähigkeit der Parteien einschränkt, Handelsüberschüsse auszuschöpfen.
    - ∘ Also nicht wie eine Beschränkung im Sinne einer Externalität zwischen den Parteien.
    - ∘ Daher gibt es auch keine Rechtfertigung für eine politische Intervention zur Behebung der Ineffizienz.
  - ⋄ In diesem Sinne kann man Informationsasymmetrien als eine Ursache von Knappheit sehen.
  - ⋄ Dies ist eine der zentralen Einsichten der Vertragstheorie: asymmetrische Information als eine solche Beschränkung des erzielbaren Überschusses zu identifizieren, zusätzlich zu den Beschränkungen, welche durch die Technologie gegeben ist.

1.3.3 Vergleich: Ex post private Information

- Zum besseren Verständnis des Zielkonflikts zwischen Effizienz und Rente vergleichen wir das Modell mit dem Fall, dass der Agent bei Vertragsabschluss noch keine private Information hat.
- Der Zeitablauf ist dann wie folgt:

1. Prinzipal offeriert einen direkten Vertrag $\{(q_L, u_L), (q_H, u_H)\}$.
2. Agent nimmt an oder lehnt ab.
   - ⋄ Lehnt er ab, erhalten beide Parteien ihre Alternativoptionen.

◇ Nimmt er an, geht es zu Stufe 3.

3. Der Typ θ realisiert sich.

◇ Nur der Agent beobachtet seinen Typ.

4. Der Agent teilt einen Typ mit.

◇ Die entsprechende Allokation wird implementiert.

- Der Unterschied zum Grundmodell ist nun, dass die Partizipationsbedingung nicht mehr in jedem Zustand, sondern lediglich in Erwartung gelten muss:

$$IR_0: \qquad \nu u_L + (1-\nu)u_H \geq 0.$$

- Damit der Agent seinen Typ wahrheitsgemäß offenbart, müssen aber die Anreizverträglichkeitsbedingungen (AV_L) und (AV_H) nach wie vor erfüllt sein.

- Wir wollen überlegen, dass der optimale Vertrag nun die First–Best Mengen implementiert, und der Prinzipal den gesamten Überschuss abschöpft.

  ◇ Der Agent bekommt also keine Informationsrente.

- Schritt 1: Im optimalen Vertrag bekommt der Agent einen erwarteten Nutzen von Null.

  ◇ Bekäme der Agent einen echt positiven erwarteten Nutzen, könnte der Prinzipal die Nutzen u_L und u_H gleichmäßig ein wenig reduzieren.

  ◇ Der Agent würde den Vertrag noch immer annehmen.

  ◇ Der Vertrag wäre noch immer anreizverträglich, weil beide Nutzen u_L und u_H in gleichem Maße gesenkt werden.

- Da die Partizipationsbedingung bindet, schöpft der Prinzipal also den gesamten erwarteten Handelsüberschuss ab.

  ◇ Also will er diesen maximieren und würde gerne die First–Best Mengen implementieren.

- Die Frage ist damit, ob es Nutzenniveaus gibt, so dass bei den First–Best Mengen (IR_0) bindet, und (AV_L) und (AV_H) erfüllt sind.

- Wir wissen bereits, dass der Vertrag mit den First–Best Mengen und den Nutzenniveaus

$$u_L = (\theta_H - \theta_L) q_H^{FB}, \quad u_H = 0$$

anreizverträglich ist.

  - ◇ Dieser Vertrag lässt dem Agenten aber eine Rente, sein erwarteter Nutzen ist: $\nu u_L = \nu(\theta_H - \theta_L) q_H^{FB}$.

- Wir können nun aber einen modifizierten Vertrag definieren mit Nutzenniveaus, die um diesen erwarteten Nutzen gerade reduziert sind:

$$u_L' = u_L - \nu u_L, \quad u_H' = u_H - \nu u_L.$$

  - ◇ Der modifizierte Vertrag erfüllt also per definitionem (IR_0).
  - ◇ Der modifizierte Vertrag ist aber auch anreizverträglich, denn bei Anreizverträglichkeit kommt es offenbar nur auf die Nutzen*differenz* an.
  - ◇ Da der modifizierte Vertrag den erwarteten Überschuss maximiert, ist er also optimal.

LEMMA 1.4 *Lernt der Agent seinen Typ erst nach Vertragsabschluss, so weist der optimale Vertrag die First–Best Mengen auf, und der Agent bekommt keine Rente.*

- Intuitiv: Der Prinzipal kann einen etwaigen positiven erwarteten Nutzen des Agenten voll abschöpfen, indem er dem Agenten bei Vertragsabschluss eine Zahlung in derselben Höhe aufbürdet.
  - ◇ Daher erzielt der Agent keine positive Rente.
  - ◇ Dadurch verschwindet der Zielkonflikt zwischen Maximierung des Überschusses und Minimierung der Rente.
  - ◇ Inbesondere macht der ineffiziente Agent einen Verlust ex post.
  - ◇ Daher ist der Vertrag nicht zulässig, wenn der Agent private Information ex ante hat.
- Ist der Agent risikoavers, gilt das Ergebnis nicht mehr.

1.3.4 Das Revelationsprinzip

- Bei einem Vertrag mit direkter Kommunikation hat der Agent lediglich zwei Mitteilungen zur Auswahl.
- Wir könnten die Kommunikationsidee verallgemeinern und eine größere Anzahl von Mitteilungen zulassen.

- Ein Vertrag mit einer “reicheren Sprache” könnte im Prinzip für den Prinzipal besser sein.
- Wir wollen nun argumentieren, dass dies aber nicht der Fall ist.
  - ◇ Der Prinzipal kann sich nicht besser stellen, wenn er eine größere Anzahl von Mitteilungen zulässt als der Agent Typen hat.
- Dies ist das sogenannte *Revelationsprinzip*.
  - ◇ Das Revelationsprinzip ist eine der wichtigsten Ideen der jüngeren Mikroökonomik!
  - ◇ Nobelpreis für Roger Myerson, 2007.
- Um das Revelationsprinzip zu zeigen, betrachten wir Verträge mit genereller Kommunikation.
  - ◇ Ein solcher Vertrag besteht aus einer beliebigen Menge M von Mitteilungen, sowie ...
  - ◇ ... einer Allokation (q_m, t_m) für jede Mitteilung $m \in M$.

DEFINITION 1.4 *(i) Ein Vertrag mit Kommunikation besteht aus einer Menge M von Mitteilungen und einer Menge von Allokationen (q_m, t_m), $m \in M$. Bezeichnung: $\Gamma = \{(q_m, t_m) \mid m \in M\}$.*

(ii) Ein direkter Vertrag ist ein Vertrag mit Kommunikation, bei dem die Menge der Mitteilungen gleich der Menge der Typen des Agenten ist: $M = \{\theta_L, \theta_H\}$.

- Nachdem der Prinzipal einen Vertrag mit Kommunikation angeboten hat, wählt der Agent eine Mitteilung m, und die Allokation (q_m, t_m) wird dann implementiert.
- Ein rationaler Agent wählt eine nutzenmaximierende Mitteilung.
  - ◇ Da der Nutzen des Agenten von seinem Typ abhängt, ist diese Mitteilung von seinem Typ abhängig.
- Wir bezeichnen die nutzenmaximierenden Mitteilungen für den effizienten bzw. ineffizienten Typ mit m_L bzw. m_H:

$$m_L = \arg\max_{m \in M} t_m - \theta_L q_m, \tag{2}$$

$$m_H = \arg\max_{m \in M} t_m - \theta_H q_m \tag{3}$$

  - ◇ Also wird im Zustand θ_L die Allokation (q_{m_L}, t_{m_L}) implementiert, und im Zustand θ_H wird die Allokation (q_{m_H}, t_{m_H}) implementiert.

- Wir bezeichnen mit

$$A(\Gamma) = \{(q_{m_L}, t_{m_L}), (q_{m_H}, t_{m_H})\}$$

die Menge der Allokationen, die der Vertrag Γ implementiert.

- Das Revelationsprinzip besagt, dass man jede Menge an Allokationen, die man überhaupt durch irgendeinen Vertrag mit Kommunikation implementieren kann, auch durch einen direkten, anreizverträglichen Vertrag implementieren kann.

PROPOSITION 1.1 *Für jeden Vertrag mit Kommunikation Γ gibt es einen direkten, anreizverträglichen Vertrag Γ^D, der dieselbe Menge an Allokationen implementiert. Formal: $A(\Gamma) = A(\Gamma^D)$.*

- Da die Menge der implementierten Allokationen die gleiche ist, erhalten Prinzipal und Agent dieselben Nutzen unter beiden Verträgen.
- Also: Bei der Suche nach optimalen Verträgen kann man sich auf direkte, anreizverträgliche Verträge beschränken!
  - ⋄ Der Prinzipal kann sich nicht besser stellen, wenn er über eine größere Klasse von Verträgen optimiert.
- Beweisidee für das Revelationsprinzip:
  - ⋄ Betrachte einen beliebigen Vertrag Γ.
  - ⋄ Konstruiere einen direkten Vertrag wie folgt:
    - ∘ Ersetze die Mitteilungen m_H und m_L durch die Mitteilungen θ_H und θ_L
    - ∘ Streiche alle anderen Mitteilungen.
  - ⋄ Formal: Definiere den direkten Vertrag durch $(q_L, t_L) = (q_{m_L}, t_{m_L})$, $(q_H, t_H) = (q_{m_H}, t_{m_H})$.
  - ⋄ Zeige nun, dass dieser Vertrag anreizverträglich ist.
    - ∘ Dies folgt aber daraus, dass m_H und m_L die optimalen Mitteilungen unter Γ waren:
    - ∘ Genauer: (AV_L) gilt, denn:

$$t_L - \theta_L q_L \overset{\text{Def.}}{=} t_{m_L} - \theta_L q_{m_L} \overset{(2)}{\geq} t_{m_H} - \theta_L q_{m_H} \overset{\text{Def.}}{=} t_H - \theta_L q_H$$

- ∘ Für (AV_H) analog.

1.4 Indirekte Implementierung via Menüs

- Wir hatten angenommen, dass der Agent mit dem Prinzipal direkt kommuniziert.
- Man könnte alternativ auch annehmen, dass der Prinzipal dem Agent ein sogenanntes *Menü* von Verträgen anbietet.
  - ⋄ Ein Menü ist nichts anderes als eine Menge von Verträgen $\{(q,t),(q',t'),(q'',t''),\ldots\}$.
- Der Prinzipal erlaubt es dem Agent, einen Vertrag aus dem Menü zu wählen, und verplichtet sich, diesen Vertrag durchzuführen.
- Dann kann sich der Prinzipal darauf beschränken, ein Menü mit zwei Verträgen $\{(q_L,t_L),(q_H,t_H)\}$ anzubieten, welches anreizverträglich ist in dem Sinne, dass
  - ⋄ Typ θ_L wählt den Vertrag (q_L,t_L), und
  - ⋄ Typ θ_H wählt den Vertrag (q_H,t_H).
  - ⋄ Das Argument ist das gleiche wie beim Revelationsprinzip.

1.5 Das Modell mit mehr als zwei Typen

- Wir erweitern nun das Modell auf den Fall, dass der Agent nicht nur zwei, sondern I mögliche Typen hat: $\theta \in \{\theta_1, \ldots, \theta_I\}$ mit

$$\theta_1 < \ldots < \theta_I.$$

  - ⋄ Die Wahrscheinlichkeit, dass Typ θ_i auftritt, sei ν_i.

- Außerdem lassen wir nun eine allgemeinere Kostenfunktion zu.
  - ⋄ $c(\theta, q)$ sind die Kosten für Typ θ für die Produktion der Menge q.
  - ⋄ Dabei nehmen wir an:
    - ∘ $c(\theta, q) = 0$: keine Fixkosten (nur zur Vereinfachung).
    - ∘ $c_\theta(\theta, q) > 0$: höhere Typen haben höhere Kosten.
    - ∘ $c_q(\theta, q) > 0$: größere Mengen sind kostspieliger.
    - ∘ $c_{qq}(\theta, q) \geq 0$: die Grenzkosten steigen in q.
    - ∘ $c_{qq\theta}(\theta, q) \geq 0$: die Grenzkosten steigen in q umso mehr, je höher der Typ (technische Annahme).
  - ⋄ Außerdem nehmen wir an, dass die sogenannte "Single–Crossing" Eigenschaft erfüllt ist, die besagt, dass höhere Typen höhere Grenzkosten haben:

$$c_{\theta q} \geq 0. \qquad (SC)$$

- Ferner nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $S'(0) = \infty$.
- Ein direkter Vertrag besteht nun aus I Mitteilungen und einer Menge aus Allokationen

$$\{(q_1, t_1), \ldots, (q_I, t_I)\}.$$

- Wie oben können wir das Revelationsprinzip anwenden:
  - ⋄ Der optimale Vertrag ist in der Klasse der direkten, anreizverträglichen Verträge.
- Die Anreizverträglichkeitsbedingungen verlangen nun, dass kein Typ θ_i einen anderen Typen θ_j mitteilt:

$$t_i - c(\theta_i, q_i) \geq t_j - c(\theta_i, q_j). \qquad (AV_{ij})$$

- In Nutzentermini:

$$u_i \geq u_j + c(\theta_j, q_j) - c(\theta_i, q_j). \qquad (AV'_{ij})$$

  ◇ Anstatt zwei haben wir nun $I \cdot (I-1)$ AV-Bedingungen!

- Die Partizipationsbedingungen werden zu

$$t_i - c(\theta_i, q_i) \geq 0, \qquad (IR_i)$$

bzw.

$$u_i \geq 0. \qquad (IR'_i)$$

- Das Problem P' des Prinzipals lautet demnach

$$\begin{array}{lrcll} & \max\limits_{(q_1,u_1),\dots,(q_I,u_I)} & & \sum_{i=1}^{I} \nu_i[S(q_i) - c(\theta_i, q_i) - u_i] \quad s.d. & \\ (AV'_{ij}): & u_i & \geq & u_j + c(\theta_j, q_j) - c(\theta_i, q_j) & \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, I\}, \\ (IR'_i): & u_i & \geq & 0 & \text{für alle } i \in \{1, \dots, I\}. \end{array}$$

- Es handelt sich also um ein Problem mit

  ◇ den $2 \cdot I$ Entscheidungsvariablen $(q_1, u_1), \dots, (q_I, u_I)$, und

  ◇ $I \cdot (I-1) + I = I^2$ Nebenbedingungen.

- Es zeigt sich aber, dass wir das Problem erheblich vereinfachen können und einige Nebenbedingungen überflüssig sind.

  ◇ Wir vereinfachen das Problem in drei Schritten.

  ◇ Die entscheidende Eigenschaft, die wir hierbei verwenden werden, ist die "Single–Crossing" Eigenschaft.

Schritt 1: Monotonie

- Zunächst überlegen wir uns, dass ein anreizverträglicher Vertrag monoton geordnete Mengen aufweisen muss.

LEMMA 1.5 *Sei* $\{(q_1, u_1), \dots, (q_I, u_I)\}$ *anreizverträglich. Dann gilt*

$$q_1 \geq \dots \geq q_I. \qquad (MON)$$

- Um dies zu verstehen, machen wir ein Widerspruchsargument: Nimm an, dass z.B. $q_1 < q_2$.
  - ⋄ Da Typ θ_2 die Wahrheit sagt, ist es besser für ihn, die große Menge q_2 statt q_1 zu produzieren.
  - ⋄ Der Transfer t_2 muss also gegenüber t_1 groß genug sein, damit sich die Mehrkosten der Produktion von q_2 gegenüber q_1 für Typ θ_2 rentieren.
  - ⋄ Nun hat aber Typ θ_1 wegen der Single–Crossing Eigenschaft niedrigere marginale Kosten als Typ θ_2.
  - ⋄ Die Mehrkosten der Produktion von q_2 gegenüber q_1 sind also geringer für Typ θ_1 als für θ_2.
  - ⋄ Daher rentiert es sich für Typ θ_1 erst recht, die größere Menge q_2 statt q_1 zu produzieren.
  - ⋄ Typ θ_1 wäre also besser gestellt, statt seines eigenen Typen, den Typ θ_2 mitzuteilen.
  - ⋄ Dies würde aber (AV_{12}) widersprechen. Daher muss $q_1 \geq q_2$ gelten!

Schritt 2: "Lokale" AV-Bedingungen implizieren "globale" AV-Bedingungen

- Die nächste Beobachtung ist, dass manche der Anreizverträglichkeitsbedingungen bereits durch andere impliziert werden und also weggelassen werden können.
- Die AV–Bedingungen ($AV_{i,i+1}$) und ($AV_{i,i-1}$) werden als "lokale" AV-Bedingungen bezeichnet.
  - ⋄ Sie garantieren, dass kein Typ seinen "Nachbarn" imitiert.
  - ⋄ Alle anderen AV-Bedingungen nennen wir "globale" AV-Bedingungen.
- Wir zeigen nun, dass die lokalen die globalen AV–Bedingungen implizieren.
  - ⋄ Die globalen AV–Bedingungen sind also automatisch erfüllt.

LEMMA 1.6 *Sei* $\{(q_1,u_1),\ldots,(q_I,u_I)\}$ *ein lokal anreizverträglicher Vertrag mit* $q_1 \geq \ldots \geq q_I$. *Dann ist* $\{(q_1,u_1),\ldots,(q_I,u_I)\}$ *auch global anreizverträglich. Das heißt, sind* ($AV'_{i,i+1}$) *und* ($AV'_{i,i-1}$) *für alle* $i \in \{1,\ldots,I\}$ *erfüllt, so sind auch* ($AV_{i,j}$) *erfüllt für alle* $i,j \in \{1,\ldots,I\}$.

- Betrachten wir den Fall mit linearen Kosten und einen Vertrag mit $q_1 > q_2 > q_3$. Dann:
  - ⋄ AV'_{12}: $\quad u_1 \geq u_2 + (\theta_2 - \theta_1)q_2$.
  - ⋄ AV'_{23}: $\quad u_2 \geq u_3 + (\theta_3 - \theta_2)q_3$.

◇ Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} u_1 &\geq u_3 + (\theta_3 - \theta_2)q_3 + (\theta_2 - \theta_1)q_2 \\ &\geq u_3 + (\theta_3 - \theta_2)q_3 + (\theta_2 - \theta_1)q_3 \qquad \text{(da } q_2 > q_3\text{)} \\ &= u_3 + (\theta_3 - \theta_1)q_3. \end{aligned}$$

◇ Diese Ungleichung ist aber nichts anderes als AV'_{13}.

◇ Dies zeigt: Hat Typ θ_1 keinen Anreiz, Typ θ_2 zu imitieren, und hat Typ θ_2 keinen Anreiz, Typ θ_3 zu imitieren, dann hat auch Typ θ_1 keinen Anreiz, Typ θ_3 zu imitieren.

• Wir können die beiden Lemmata zu der folgenden Charakterisierung von Anreizverträglichkeit zusammenfassen:

LEMMA 1.7 *Ein Vertrag $\{(q_1,u_1),\dots,(q_I,u_I)\}$ ist anreizverträglich genau dann, wenn gilt:*

◇ $q_1 \geq \dots \geq q_I$.

◇ *($AV'_{i,i+1}$) und ($AV'_{i,i-1}$) für alle $i \in \{1,\dots,I\}$.*

• Wenden wir uns nun den Partizipationsbedingungen zu.

• Die Bedingung ($AV'_{i,i+1}$) impliziert, dass effizientere Typen einen höheren Nutzen bekommen müssen:

$$u_i \geq u_{i+1}.$$

◇ Das Argument ist wie im 2-Typen Fall.

◇ Ein effizienter Typ kann sich durch Imitierung eines ineffizienteren Typs immer mindestens dessen Nutzen sichern.

• Daher reicht es, die Partizipation des ineffizientesten Typen θ_I sicher zu stellen.

◇ Die anderen Partizipationsbedingungen sind dann automatisch erfüllt.

• Also gilt:

LEMMA 1.8 *Ein Vertrag $\{(q_1,u_1),\dots,(q_I,u_I)\}$ ist anreizverträglich und individuell rational genau dann, wenn gilt:*

◇ $q_1 \geq \ldots \geq q_I$.

◇ *($AV'_{i,i+1}$) und ($AV'_{i,i-1}$) für alle $i \in \{1, \ldots, I\}$.*

◇ $u_I \geq 0$.

- Damit reduzieren sich die I^2 Nebenbedingungen im Problem P' auf die obigen Nebenbedingungen.
- Das sind noch immer relativ viele Nebenbedingungen.
  ◇ Wir werden nun Optimalitätsargumente verwenden, um sie noch weiter zu reduzieren.

Schritt 3: Optimalität

- Betrachten wir den Fall mit 3 Typen und linearen Kosten: Die 4 AV-Bedingungen sind dann:

$$\begin{aligned}
AV'_{12}: \quad & u_1 \geq u_2 + (\theta_2 - \theta_1)q_2, \\
AV'_{23}: \quad & u_2 \geq u_3 + (\theta_3 - \theta_2)q_3, \\
AV'_{21}: \quad & u_2 \geq u_1 - (\theta_1 - \theta_2)q_1, \\
AV'_{32}: \quad & u_3 \geq u_2 - (\theta_3 - \theta_2)q_2.
\end{aligned}$$

- Wir wollen überlegen, dass unter einem optimalen Vertrag (AV'_{12}) und (AV'_{23}) binden, und die beiden anderen Bedingungen automatisch erfüllt sind.
  ◇ Nehmen wir an, dass (AV'_{12}) nicht bindet.
  ◇ Dann könnten wir u_1 ein klein wenig reduzieren.
  ◇ Dies würde keine andere AV-Bedingung verletzen, aber den Nutzen des Prinzipals erhöhen.
    ∘ Also: $u_1 = u_2 + (\theta_2 - \theta_1)q_2$.
    ∘ Damit ist aber auch (AV'_{21}) erfüllt, denn $q_1 \geq q_2$.
  ◇ Nehmen wir nun an, dass (AV'_{23}) nicht bindet.
  ◇ Dann könnten wir u_2 ein wenig reduzieren.
  ◇ Beachte: Dies würde (AV'_{32}) offensichtlich lockern, und (AV'_{21}) ist ja ohnehin erfüllt.
    ∘ Also: $u_2 = u_3 + (\theta_3 - \theta_2)q_3$.
    ∘ Damit ist aber auch (AV'_{32}) erfüllt, denn $q_2 \geq q_3$.
- Außerdem muss in einem optimalen Vertrag gelten, dass $u_I = 0$.

- Also haben wir das folgende Resultat:

LEMMA 1.9 *Sei* $\{(q_1, u_1), \ldots, (q_I, u_I)\}$ *ein optimaler, anreizverträglicher und individuell rationaler Vertrag. Dann gilt:*

◇ $q_1 \geq \ldots \geq q_I$.

◇ *(*$AV'_{i,i+1}$*) bindet für* $i \in \{1, \ldots, I-1\}$*, also:* $u_i = u_{i+1} + c(\theta_{i+1}, q_{i+1}) - c(\theta_i, q_{i+1})$

◇ *(*IR_I*) bindet, also:* $u_I = 0$.

◇ *Alle anderen Nebenbedingungen sind automatisch erfüllt.*

- Wir können uns also bei der Suche nach einem optimalen Vertrag auf die Klasse von Verträgen beschränken, welche die Eigenschaften im vorigen Lemma hat.

- Beachte aber nun, dass die bindenden Bedingungen die Renten u_i des Agenten eindeutig als Funktion der Mengen festlegen. Für lineare Kosten:

◇ $u_I = 0$

◇ Dies einsetzen in ($AV_{I-1,I}$): $u_{I-1} = (\theta_I - \theta_{I-1})q_I$;

◇ Dies einsetzen in ($AV_{I-2,I-1}$): $u_{I-2} = (\theta_I - \theta_{I-1})q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2})q_{I-1}$;

◇ Dies einsetzen in ($AV_{I-3,I-2}$): $u_{I-3} = (\theta_I - \theta_{I-1})q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2})q_{I-1} + (\theta_{I-2} - \theta_{I-3})q_{I-2}$;

◇ ... usw. ...

$$u_{i-1} = (\theta_I - \theta_{I-1})q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2})q_{I-1} + \ldots + (\theta_i - \theta_{i-1})q_i.$$

- Für gegebene Mengen legen also die laut dem Lemma bindenden AV- und die IR-Bedingungen den Nutzen des Agenten eindeutig fest.

◇ Insbesondere sind dadurch auch die Transfer eindeutig festgelegt.

◇ Also hat der Prinzipal keinen Spielraum mehr, was die Wahl der Nutzen/Transfers anlangt.

◇ Hat er erst einmal die Mengen festgelegt, kann er nicht noch weiter über die
Nutzen/Transfers optimieren.

- Die erwartete Rente des Agenten ist also

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I} v_i u_i &= v_I u_I + \ldots + v_{i-1} u_{i-1} + \ldots + v_1 u_1 \\
&= v_I \cdot 0 \\
&\quad + v_{I-1}(\theta_I - \theta_{I-1}) q_I \\
&\quad + v_{I-2}[(\theta_I - \theta_{I-1}) q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2}) q_{I-1}] \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + v_{i-1}[(\theta_I - \theta_{I-1}) q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2}) q_{I-1} + \ldots + (\theta_i - \theta_{i-1}) q_i] \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + v_1 \ [(\theta_I - \theta_{I-1}) q_I + (\theta_{I-1} - \theta_{I-2}) q_{I-1} + \ldots + (\theta_i - \theta_{i-1}) q_i \ + \ldots + \ (\theta_2 - \theta_1) q_2].
\end{aligned}
$$

- Beachte: In jeder "Spalte" steht dasselbe!
  - ⋄ Also können wir statt über die Zeilen über die Spalten aufsummieren:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I} v_i u_i &= [v_1 + \ldots + v_{I-1}](\theta_I - \theta_{I-1}) q_I \\
&\quad + [v_1 + \ldots + v_{I-2}](\theta_{I-1} - \theta_{I-2}) q_{I-1} \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + [v_1 + \ldots + v_{i-1}](\theta_i - \theta_{i-1}) q_i \\
&\quad + \ldots \\
&\quad + [v_1 + v_2](\theta_3 - \theta_2) q_3 \\
&\quad + v_1(\theta_2 - \theta_1) q_2.
\end{aligned}
$$

- Dies können wir nun in die Zielfunktion des Prinzipals einsetzen.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{I} \nu_i[S(q_i) - \theta_i q_i - u_i] &= \sum_{i=1}^{I} \nu_i[S(q_i) - \theta_i q_i] - \sum_{i=1}^{I} \nu_i u_i \\
&= \nu_1[S(q_1) - \theta_1 q_1] \\
&\quad + \nu_2[S(q_2) - \theta_2 q_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2}(\theta_2 - \theta_1) q_2] \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \nu_i[S(q_i) - \theta_i q_i - \frac{\nu_1 + \dots + \nu_{i-1}}{\nu_i}(\theta_i - \theta_{i-1}) q_i] \\
&\quad + \dots \\
&\quad + \nu_I[S(q_I) - \theta_I q_I - \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \dots + \nu_{I-1}}{\nu_I}(\theta_I - \theta_{I-1}) q_I]. \qquad (4)
\end{aligned}$$

  ◇ Dies ist eine Funktion, die nur noch von den Variablen $q_1, \dots, q_I$ abhängt!

- Die Interpretation der Zielfunktion ist genau dieselbe wie im 2-Typen Fall!

  ◇ Der Prinzipal sieht sich wieder virtuellen Kosten gegenüber, die höher als die tatsächlichen Kosten sind.

  ◇ Doch nun fallen virtuelle Kosten nicht nur für den ineffizientesten Typen an.

  ◇ Alle Typen außer dem ineffizientesten Typ θ_I bekommen eine Informationsrente.

  ◇ Die Differenz aus virtuellen und tatsächlichen Kosten muss der Prinzipal dem Agenten zahlen, damit dieser nicht vorgibt, der nächst ineffizientere Typ zu sein.

- Damit lautet das Problem des Prinzipals, die Zielfunktion (4) zu maximieren unter der Nebenbedingung, dass die Monotonieeigenschaft $q_1 \geq \dots \geq q_I$ erfüllt ist.

- Hierzu ignorieren wir zunächst die Monotoniebedingung und hoffen, dass sie automatisch erfüllt ist.

  ◇ Wir nennen das Optimierungsproblem ohne Monotoniebedingung auch das “abgeschwächte” (“relaxed”) Problem.

  ◇ Erfüllt die Lösung des abgeschwächten Problems die Monotoniebedingung, dann ist sie auch eine Lösung des Originalproblems.

- Das abgeschwächte Problem besteht also einfach in der (unbeschränkten) Maximierung der Zielfunktion (4) über $(q_1, \dots, q_I)$.

• Im Maximum der Zielfunktion ist der Grenznutzen gleich den virtuellen Kosten:

$$\begin{aligned}
S'(q_1) &= \theta_1; \\
S'(q_2) &= \theta_2 + \frac{\nu_1}{\nu_2}(\theta_2 - \theta_1); \\
&\dots \\
S'(q_i) &= \theta_i + \frac{\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1}}{\nu_i}(\theta_i - \theta_{i-1}); \\
&\dots \\
S'(q_I) &= \theta_I + \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{I-1}}{\nu_I}(\theta_I - \theta_{I-1}).
\end{aligned}$$

⋄ (Die Bedingung zweiter Ordnung ist erfüllt aufgrund der Annahmen an S.)

• Da S' annahmegemäß fallend ist, sind die resultierenden Mengen monoton geordnet genau dann, wenn die virtuellen Kosten steigend im Typ sind:

$$\theta_1 \leq \ldots \leq \theta_i + \frac{\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1}}{\nu_i}(\theta_i - \theta_{i-1}) \leq \ldots \leq \theta_I + \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{I-1}}{\nu_I}(\theta_I - \theta_{I-1}).$$

• Betrachten wir nun den Spezialfall, dass die Differenz der marginalen Kosten konstant ist:

$$(\theta_i - \theta_{i-1}) \equiv \Delta\theta \quad \text{für alle } i \in \{2, \ldots, I\}.$$

• Dann sind die virtuellen Kosten wachsend, wenn gilt:

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} \leq \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_3} \leq \ldots \frac{\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1}}{\nu_i} \leq \ldots \frac{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{I-1}}{\nu_I}. \qquad (MH)$$

⋄ Die Funktion

$$h_1 = 0, \quad h_i \equiv \frac{\nu_1 + \ldots + \nu_{i-1}}{\nu_i} \text{ für } i = 2, \ldots, I$$

ist aus der Statistik als (inverse) "Hazardrate" bekannt.

⋄ Die Bedingung (MH) besagt also, dass die Hazardrate wachsend (in i) ist.

LEMMA 1.10 *Betrachte das Modell mit I Typen, linearen Kosten, und konstanter Differenz der marginalen Kosten. Außerdem sei die Hazardrate wachsend. Dann gilt für die Lösung $(q_1^*, u_1^*), \ldots, (q_I^*, u_I^*)$ von P':*

(i) Die Menge des effizientesten Typen entspricht der First–Best Menge: $S'(q_1^*) = \theta_1$.

(ii) Die Menge q_i^* der weniger effizienten Typen θ_i, $i > 1$, ist kleiner als die First–Best Menge und ist gegeben durch

$$S'(q_i^*) \quad = \quad \theta_i + h_i \cdot (\theta_i - \theta_{i-1}) \tag{5}$$

(iii) Nur der ineffizienteste Typ θ_I bekommt keine Informationsrente: $u_I^* = 0$. Alle anderen Typen bekommen eine Informationsrente: $u_i^* = \sum_{j=i+1}^{I} (\theta_j - \theta_{j-1}) q_j^*$.

- Die qualitativen Eigenschaften des optimalen Vertrages sind ähnlich wie im 2-Typen Fall.
  - ⋄ Es gibt “no distortion at the top”.
  - ⋄ Alle anderen Mengen sind ineffizient niedrig und nach unten verzerrt.
  - ⋄ Nur der ineffizienteste Typ bekommt keine Informationsrente.
- Was passiert, wenn die Hazardrate nicht monoton ist?
  - ⋄ Bzw. falls die virtuellen Kosten nicht wachsend sind?
  - ⋄ Dann verletzt die Lösung des abgeschwächten Problems die Monotoniebedingung.
- Beispiel:
  - ⋄ $I = 3, \;\; \theta_1 = 2, \;\; \theta_2 = 4, \; \theta_3 = 6, \;\; S(q) = 200 - 1/2 \cdot (20 - q)^2$.
  - ⋄ $\nu_1 = 4/10, \;\; \nu_2 = 1/10, \;\; \nu_3 = 5/10$.
  - ⋄ First–Best: $q_1^{FB} = 18, \;\; q_2^{FB} = 16, \;\; q_3^{FB} = 14$.
  - ⋄ Bedingung erster Ordnung für das abgeschwächte Problem:

$$\begin{aligned} 20 - q_1 &= 2, \\ 20 - q_2 &= 4 + \frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot 2 = 12, \\ 20 - q_3 &= 6 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_3} \cdot 2 = 8. \end{aligned}$$

  - ⋄ Also: $q_1 = 18, \;\; q_2 = 8, \;\; q_3 = 12$.
  - ⋄ Monotonie ist also verletzt. Die Lösung des abgeschwächten Problem löst nicht das Originalproblem!
  - ⋄ Ausweg: im abgeschwächten Problem ist die Monotonie zwischen q_2 und q_3 verletzt.
    - ∘ Dies legt nahe, dass im Optimum des Originalproblems gilt: $q_2 = q_3 = \bar{q}$.
  - ⋄ Also maximieren wir die Zielfunktion unter dieser Nebenbedingung.

⋄ Die Zielfunktion wird dann

$$\nu_1[S(q_1)-\theta_1 q_1]+\nu_2[S(\bar{q})-\theta_2\bar{q}-\frac{\nu_1}{\nu_2}(\theta_2-\theta_1)\bar{q}]+\nu_3[S(\bar{q})-\theta_3\bar{q}-\frac{\nu_1+\nu_2}{\nu_3}(\theta_3-\theta_2)\bar{q}].$$

⋄ Bedingung erster Ordnung:

$$\begin{aligned} S'(q_1) &= \theta_1, \\ \nu_2 S'(\bar{q})+\nu_3 S'(\bar{q}) &= \nu_2\theta_2+\nu_1(\theta_2-\theta_1)+\nu_3\theta_3+(\nu_1+\nu_2)(\theta_3-\theta_2). \end{aligned}$$

⋄ Werte einsetzen: $q_1 = 18$, $\bar{q} = \frac{34}{3} = 11.33$.

⋄ Im optimalen Vertrag bekommen also die Typen θ_2 und θ_3 die gleiche Menge.

∘ Man sagt, es kommt zu einer “Bündelung” der Typen (auch: “Pooling” bzw. “Bunching”).

⋄ Im 3-Typen Fall kann es nur zu einer Bündelung der Typen θ_2 und θ_3 kommen.

⋄ Mit mehr als drei Typen hängt es vom spezifischen Problem ab, welche Typen im optimalen Vertrag gebündelt werden.

1.6 Verträge mit öffentlicher ex post Information

- Wir betrachten nun eine Situation, in der nach Vertragsabschluss zusätzliche Information bekannt wird.
  - ⋄ Und zwar Information, die mit dem Typen des Agenten korreliert ist.
- Die Kosten des Agenten sind z.B. konjunkturabhängig, der tatsächliche Konjunkturverlauf wird aber erst später allgemein bekannt.
- Wir betrachten die Situation, dass die zusätzliche Information kontrahierbar ist.
- Ein Vertrag kann also auf diese Information zusätzlich konditionieren.
  - ⋄ Zusätzlich zur Mitteilung des Agenten.
- Ein möglicher Vertrag ist aber auch der bisher betrachtete Vertrag, der ausschließlich auf die Mitteilung des Agenten konditioniert und die neue Information ignoriert.
- Daraus folgt, dass sich der Prinzipal durch die Verfügbarkeit der neuen Informattion auf jeden Fall (schwach) besser stellen muss.
  - ⋄ Die Frage ist, um wie viel besser.
- Wir betrachten wieder das Modell mit zwei Typen $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$.
- Wir modellieren die zusätzliche Information wie folgt.
  - ⋄ Es gibt ein Signal s, das die Ausprägungen g (wie grün) oder r (wie rot) annehmen kann.
  - ⋄ Die konditionale Wkt, dass das Signal gleich g ist, bedingt darauf, dass der Typ θ_L ist, ist

$$P[s = g \mid \theta = \theta_L] = \alpha, \qquad \alpha \in [0, 1].$$

  - ⋄ Die konditionale Wkt, dass das Signal gleich g ist, bedingt darauf, dass der Typ θ_H ist, ist

$$P[s = g \mid \theta = \theta_H] = \beta, \qquad \beta \in [0, 1].$$

  - ⋄ Falls $\alpha \neq \beta$, so ist die Beobachtung von s (für einen Aussenstehenden) informativ über den Typen:
    - ∘ Falls $\alpha > \beta$, so deutet die Beobachtung von g darauf hin, dass der Typ θ_L ist ...
    - ∘ ... und die Beobachtung von r deutet darauf hin, dass der Typ θ_H ist.
    - ∘ (Nur falls $\alpha = \beta$, lernt man nichts Neues aus dem Signal.)

- Der Zeitablauf ist wie im Grundmodell, mit dem folgenden Unterschied:
  - Nach Vertragsabschluss wird s beobachtet, und die Allokation kann davon abhängig gemacht werden.
- D.h. ein Vertrag hängt nun von der Mitteilung des Agenten über seinen Typen und von der Realisierung des Signals ab.
  - Dass es einen optimalen Vertrag mit einer solchen Struktur gibt, folgt aus dem Revelationsprinzip.
  - Formal besteht ein Vertrag nun aus vier Allokationen:

$$\{(q_{Lg}, t_{Lg}),\ (q_{Lr}, t_{Lr}),\ (q_{Hg}, t_{Hg}),\ (q_{Hr}, t_{Hr})\}.$$

  - In Nutzentermini: $u_{Lg} = t_{Lg} - \theta_L q_{Lg}$, etc.

$$\{(q_{Lg}, u_{Lg}),\ (q_{Lr}, u_{Lr}),\ (q_{Hg}, u_{Hg}),\ (q_{Hr}, u_{Hr})\}.$$

- Da der Agent bei Wahl seiner Mitteilung die Realisierung des Signals noch nicht kennt, entspricht die Wahl der Mitteilung nun de facto der Wahl einer Lotterie.
  - Wählt z.B. Typ θ_L die Mitteilung H, so erzielt er
    - $t_{Hg} - \theta_L q_{Hg}$ mit Wkt α;
    - $t_{Hr} - \theta_L q_{Hr}$ mit Wkt $1-\alpha$.
  - Wählt hingegen Typ θ_H die Mitteilung H, so erzielt er
    - $t_{Hg} - \theta_H q_{Hg}$ mit Wkt β;
    - $t_{Hr} - \theta_H q_{Hr}$ mit Wkt $1-\beta$.
- Die Anreizverträglichkeitsbedingungen sind also:

$$\begin{aligned}
AV_L: \quad & \alpha(t_{Lg} - \theta_L q_{Lg}) + (1-\alpha)(t_{Lr} - \theta_L q_{Lr}) \ \geq\ \alpha(t_{Hg} - \theta_L q_{Hg}) + (1-\alpha)(t_{Hr} - \theta_L q_{Hr}),\\
AV_H: \quad & \beta(t_{Hg} - \theta_H q_{Hg}) + (1-\beta)(t_{Hr} - \theta_H q_{Hr}) \ \geq\ \beta(t_{Lg} - \theta_H q_{Lg}) + (1-\beta)(t_{Lr} - \theta_H q_{Lr}).
\end{aligned}$$

  - In Nutzentermini:

$$\begin{aligned}
AV_L': \quad & \alpha u_{Lg} + (1-\alpha) u_{Lr} \ \geq\ \alpha[u_{Hg} + (\theta_H - \theta_L) q_{Hg}] + (1-\alpha)[u_{Hr} + (\theta_H - \theta_L) q_{Hr}],\\
AV_H': \quad & \beta u_{Hg} + (1-\beta) u_{Hr} \ \geq\ \beta[u_{Lg} - (\theta_H - \theta_L) q_{Lg}] + (1-\beta)[u_{Lr} - (\theta_H - \theta_L) q_{Lr}].
\end{aligned}$$

• Die Partizipationsbedingungen sind:

$$\begin{aligned} IR_L: \quad & \alpha(t_{Lg} - \theta_L q_{Lg}) + (1-\alpha)(t_{Lr} - \theta_L q_{Lr}) \geq 0, \\ IR_H: \quad & \beta(t_{Hg} - \theta_H q_{Hg}) + (1-\beta)(t_{Hr} - \theta_H q_{Hr}) \geq 0. \end{aligned}$$

◇ bzw.

$$\begin{aligned} IR'_L: \quad & \alpha u_{Lg} + (1-\alpha) u_{Lr} \geq 0, \\ IR'_H: \quad & \beta u_{Hg} + (1-\beta) u_{Hr} \geq 0. \end{aligned}$$

• Im Grundmodell hatten wir argumentiert:

◇ Der effiziente Typ muss eine positive Rente bekommen.

◇ Denn er kann vorgeben, der ineffiziente Typ zu sein.

◇ Da seine Kosten niedriger sind, muss er dabei einen höheren Nutzen als der ineffiziente Typ erzielen.

• Gilt dieses Argument nun noch immer?

• Wenn Typ θ_L behauptet, der Typ θ_H zu sein, so bekommt er

◇ $u_{Hg} + (\theta_H - \theta_L) q_{Hg}$, falls $s = g$,

◇ $u_{Hr} + (\theta_H - \theta_L) q_{Hr}$, falls $s = r$.

∘ Er bekommt also in beiden(!) Fällen mehr als Typ θ_H, wenn dieser wahrheitsgemäß berichtet.

◇ Aber bekommt er daher auch *in Erwartung* echt mehr als Typ θ_H?

◇ Nicht unbedingt, denn Typ θ_L hat eine andere Wkts-Einschätzung als Typ θ_H darüber, ob $s = g$ oder $s = r$ eintritt.

• Betrachten wir den Fall, dass $\alpha > 1/2$, und $\beta = 1/2$.

◇ Angenommen, Typ θ_H erzielt -10, wenn $s = g$, und $+10$, wenn $s = r$.

∘ Sein erwarteter Nutzen ist also: $-1/2 \cdot 10 + 1/2 \cdot 10 = 0$.

◇ Nehmen wir weiter an, θ_L erzielt -8, wenn $s = g$, und $+12$, wenn $s = r$.

∘ In beiden Fällen erzielt er also mehr als θ_H.

∘ Aber sein *erwarteter* Nutzen ist: $-\alpha \cdot 8 + (1-\alpha) \cdot 12$, ...

... und dies ist *negativ*, wenn α groß genug ist! (Genauer, falls $\alpha > 3/5$.)

- Also gilt das Argument des Grundmodells nicht mehr.
  - ⋄ Die entscheidende Differenz zum Grundmodell ist, dass die Typen sich nun nicht mehr nur in Bezug auf ihre Kosten unterscheiden, sondern auch in Bezug auf ihre Erwartungen.
- Wir wollen nun überlegen, wie der Prinzipal diese Unterschiede ausnutzen kann.
- Betrachten wir einen Vertrag, der Typ θ_H einen Erwartungsnutzen von 0 gibt, wenn dieser wahrheitsgemäß berichtet (gelte weiterhin $\alpha > \beta = 1/2$):

$$1/2 \cdot u_{Hg} + 1/2 \cdot u_{Hr} = 0.$$

  - ⋄ In einem der beiden Signalzustände macht Typ θ_H also einen Verlust.
  - ⋄ Dieser wird aber durch einen entsprechenden Gewinn im anderen Signalzustand kompensiert.
  - ⋄ Es gilt $u_{Hg} = -u_{Hr}$.
- Betrachten wir nun Typ θ_L.
  - ⋄ Wenn er "lügt" und θ_H mitteilt, so erzielt er den Erwartungsnutzen

$$\begin{aligned} & \alpha(\theta_H - \theta_L)q_{Hg} + (1-\alpha)(\theta_H - \theta_L)q_{Hr} + \alpha u_{Hg} + (1-\alpha)u_{Hr} \\ = \quad & K + \alpha u_{Hg} + (1-\alpha)u_{Hr}, \end{aligned}$$

    wobei K eine Konstante ist, die nicht von u_{Hg} und u_{Hr} abhängt.
  - ⋄ Beachte, da $u_{Hr} = -u_{Hg}$, dann gilt, wenn $u_{Hg} < 0$ und wegen $\alpha > 1/2$:

$$\alpha u_{Hg} + (1-\alpha)u_{Hr} = (2\alpha - 1)u_{Hg} < 0.$$

    - ∘ Typ θ_L hält den Signalzustand g für wahrscheinlicher als Typ θ_H.
    - ∘ Wenn es in diesem Zustand einen tatsächlichen Verlust $u_{Hg} < 0$ gibt, so macht θ_L einen ...

      ... Verlust in *Erwartung*, wenn Typ θ_H in Ewartung Null bekommt.
- Nun können wir den Verlust $u_{Hg} < 0$ im Zustand g zunehmend größer machen,

  ... und den Gewinn $u_{Hr} = -u_{Hg}$ im Zustand r entsprechend erhöhen.
  - ⋄ Typ θ_H bekommt immer noch einen Erwartungsnutzen von Null (wenn er wahrheitsgemäß berichtet).
  - ⋄ Der Erwartungsnutzen von Typ θ_L aus einer Mitteilung θ_H wird dadurch aber immer negativer.

◇ Eine Lüge von Typ θ_L wird also irgendwann "unendlich" unattraktiv.

• Die Anreizbedingung (AV_L') kann auf diese Weise erfüllt werden, ohne dass Typ θ_L eine Rente bezahlt werden muss!

PROPOSITION 1.2 *Sei $\alpha \neq \beta$.*

(i) Seien die Mengen q_{Lg}, q_{Lr}, q_{Hg}, q_{Hr} gegeben. Dann gibt es Nutzenniveaus u_{Lg}, u_{Lr}, u_{Hg}, u_{Hr}, so dass der resultierende Vertrag anreizverträglich ist, und der Agent keine Rente bekommt, also die Partizipationbedingungen binden.

(ii) Insbesondere kann der Prinzipal die First–Best Mengen $q_{Lg} = q_{Lr} = q_L^{FB}$ und $q_{Hg} = q_{Hr} = q_H^{FB}$ implementieren, ohne Informationsrente an den Agenten zahlen zu müssen. Er kann also den First–Best Überschuss voll abschöpfen.

• Das Resultat widerspricht der Intuition, dass private Information zu Verzerrungen und zu Informationsrenten führt.

◇ Private Information kann irrelevant sein.

• Das Resultat kann man auch in Termini von Wetten interpretieren:

◇ Der Prinzipal bietet dem Agenten zwei Wetten mit je verschiedenen Ausgängen in den Zuständen g und r.

◇ Da der Agent je nach Typ unterschiedliche Wkts-Einschätzungen der Zustände hat, hat er, je nach Typ, unterschiedliche Zahlungsbereitschaften für die Wetten.

◇ Man kann nun immer Wetten finden, so dass unterschiedliche Typen unterschiedliche Wetten präferieren.

◇ Dadurch gelingt es, dass der Agent seinen Typ wahrheitsgemäß offenbart.

• Das Resultat hat ein Analogon in der Auktionstheorie:

◇ Wenn die Wertschätzungen der Bieter (Agenten) in der Auktion korreliert sind, dann kann der Auktionator (Prinzipal) die volle Zahlungsbereitschaft der Bieter abschöpfen.

• Das Resultat nutzt aus, dass der Agent risikoneutral in Bezug auf Geld ist.

◇ Wenn $\alpha \approx \beta$, verlangt der Vertrag sehr große negative Transfers.

- ⋄ Wenn der Agent risikoavers oder durch beschränkte Haftung geschützt ist, dann kann man die Transfers nicht beliebig negativ machen, ohne den Erwartungsnutzen des Agenten zu verändern.

- Außerdem basiert das Resultat auf der Annahme, dass ein Agent mit einer anderen Wkts-Einschätzung des Signals auch andere Kosten hat.
  - ⋄ Zum Beispiel könnte es drei Typen geben:
    - Typ “$L1$” mit Kosten θ_L glaubt, dass $s = g$ mit Wkt α_1 eintritt.
    - Typ “$L2$” mit Kosten θ_L glaubt, dass $s = g$ mit Wkt α_2 eintritt.
    - Typ “H” mit Kosten θ_H glaubt, dass $s = g$ mit Wkt β eintritt.
  - ⋄ Nehmen wir an, dass $\alpha_1 > 1/2$, $\beta = 1/2$, und $\alpha_2 < 1/2$, dann gilt:
    - Wenn Typ H keine Rente bekommt, und Typ $L1$ keinen Anreiz hat, Typ H mitzuteilen, dann bekommt Typ $L2$ einen positiven Erwartungsnutzen, wenn er Typ H mitteilt.
  - ⋄ Also könnte sich hier Typ $L2$ eine Rente sichern.

1.7 Typabhängige Alternativoptionen

- Wir betrachten nun eine Situation, in der die Alternativoption des Agenten von dessen Typ abhängt.
  - ⋄ Es erscheint plausibel, dass effizientere Typen auch besser Alternativoptionen haben.
  - ⋄ Wir normieren die Alternativoption des ineffizienten Typs nach wie vor auf Null.
  - ⋄ Wir bezeichnen die Alternativoption des effizienten Typs mit $u_0 > 0$.
- Die Partizipationsbedingungen werden dann:

$$\begin{aligned} IR_L: \qquad & u_L \geq u_0, \\ IR_H: \qquad & u_H \geq 0. \end{aligned}$$

- Die Anreizverträglichkeitsbedingungen sind wie im Grundmodell.
- Wir bezeichnen das resultierende Problem des Prinzipals mit P^0:

$$\max_{(q_L,u_L),(q_H,u_H)} \nu_L[S(q_L)-\theta_L-u_L]+\nu_H[S(q_H)-\theta_H-u_H] \quad s.d. \quad IR_L,\, IR_H,\, AV_L,\, AV_H.$$

- Wir werden die Alternativoption u_0 variieren und die resultierende Veränderung auf den optimalen Vertrag analysieren.
- Wir beginnen mit einigen grundlegenden Vorüberlegungen.

LEMMA 1.11 *Der Profit des Prinzipals sinkt in der Alternativoption u_0.*

- Das Resultat basiert auf einem einfachen “Replikationsargument”.
  - ⋄ Jeder Vertrag, der mit $u_0 > 0$ zulässig ist, also alle Nebenbedingungen erfüllt, ist auch mit $u_0 = 0$ zulässig.
  - ⋄ Inbesondere gilt dies für den optimalen Vertrag bei $u_0 > 0$.
  - ⋄ Der optimale Vertrag bei $u_0 = 0$ muss dem Prinzipal also mindestens so viel liefern wie der optimale Vertrag bei $u_0 > 0$.
- Im Grundmodell mit $u_0 = 0$, war IR_L automatisch erfüllt, wenn IR_H efüllt war.
  - ⋄ Der springende Punkt ist, dass dies bei $u_0 > 0$ nicht mehr der Fall sein muss.

◇ Wenn u_0 sehr groß ist, reicht die Rente, die Typ θ_L aus dem optimalen Vertrag mit $u_0 = 0$ bekommt, nicht mehr notwendigerweise aus, um ihn zur Annahme des Vertrags zu bewegen.

- Aber falls u_0 hinreichend klein ist, reicht die Informationsrente des optimalen Vertrags aus dem Grundmodell aus, um IR_L zu erfüllen.

◇ Zur Erinnerung: der Nutzen für Typ θ_L aus diesem Vertrag ist: $(\theta_H - \theta_L)q_H^{SB}$. Also:

LEMMA 1.12 *Falls $u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_H^{SB}$, dann löst der optimale Vertrag des Grundmodells (mit $u_0 = 0$) auch das Problem P^0.*

- Betrachten wir also von nun an den interessanteren Fall, dass $u_0 > (\theta_H - \theta_L)q_H^{SB}$.

◇ In diesem Fall verletzt der optimale Vertrag des Grundmodells (mit $u_0 = 0$) die Bedingung IR_L^0.

◇ Daher wird im optimalen Vertrag mit $u_0 > 0$ diese Nebenbedingung binden:

LEMMA 1.13 *Falls $u_0 > (\theta_H - \theta_L)q_H^{SB}$, dann bindet IR_L unter dem optimalen Vertrag: $u_L = u_0$.*

- Setzen wir nun $u_L = u_0$ in die Nebenbedingungen ein, so erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
AV_L: \quad & u_0 \geq u_H + (\theta_H - \theta_L)q_H, \\
AV_H: \quad & u_H \geq u_0 - (\theta_H - \theta_L)q_L, \\
IR_H: \quad & u_H \geq 0.
\end{aligned}
$$

- Versuchen wir zunächst, diese Bedingungen intuitiv zu verstehen.

- Dazu stellen wir uns vor, dass u_0 sehr groß ist.

◇ Dies bedeutet, man muss dem Typ θ_L einen sehr guten "Deal" bieten, z.B. in Form eines hohen Transfers.

◇ Dadurch wird es aber nun für Typ θ_H attraktiver zu "lügen" und Typ θ_L zu melden.

◇ Dies kann man daran sehen, dass die rechte Seite von AV_H in u_0 steigt.

- Nun hat der Prinzipal zwei Möglichkeiten.

◇ Er kann Typ θ_H keine Rente geben und $u_H = 0$ setzen.

∘ Das hat den offensichtlichen Vorteil, dass er Typ θ_H nur relativ kleine Transfers zahlen muss.

∘ Wenn u_0 allerdings groß ist, kann man bei $u_H = 0$ die AV_H nur erfüllen, wenn q_L sehr groß ist.

    ◦ Dies ist teuer, denn ab einem bestimmten Punkt sinkt der Überschuss, je größer die Menge.

  ⋄ Die andere Möglichkeit ist, Typ θ_H eine Rente zu geben: $u_H > 0$.

    ◦ Dies hat den Vorteil, dass man dann AV_H auch mit relativ kleinem q_L erfüllen kann.

    ◦ Aber man muss nun eben eine Rente an Typ θ_H abtreten.

• Intuitiv wird der Prinzipal von der zweiten Möglichkeit Gebrauch machen, wenn u_0 sehr, sehr groß ist.

  ⋄ Denn sonst (also um $u_H = 0$ zu setzen), müßte man q_L sehr, sehr groß machen.

• Wir werden diese Überlegungen nun formalisieren.

• Dazu machen wir die folgende Fallunterscheidung.

  ⋄ Wir lösen zunächst das abgeschwächte Problem, in dem wir IR_H ignorieren.

  ⋄ Erfüllt die Lösung des abgeschwächten Problems die IR_H automatisch, dann haben wir auch eine Lösung des Originalproblems.

    ◦ Dies wird der Fall sein, wenn u_0 sehr groß ist.

  ⋄ Verletzt hingegen die Lösung des abgeschwächten Problems die IR_H, so muss IR_H im Optimum binden.

    ◦ Für diesen Fall können wir dann den optimalen Vertrag bestimmen.

LEMMA 1.14 *Betrachte das abgeschwächte Problem ohne IR_H. Die optimalen Mengen für dieses Problem sind gegeben durch $q_H^* = q_H^{FB}$, und $q_L^* = \tilde{q}$, wobei*

$$S'(\tilde{q}_L) - \theta_L + \frac{\nu_H}{\nu_L}(\theta_H - \theta_L) = 0.$$

Somit erfüllt die Lösung des abgeschwächten Problems IR_H automatisch, wenn:

$$u_0 \geq (\theta_H - \theta_L)\tilde{q}_L.$$

Beachte außerdem, dass $q_L^{FB} < \tilde{q}_L$.

• Das Argument ist wie folgt.

  ⋄ Ohne IR_H muss AV_H binden.

    ◦ Andernfalls könnte man u_H ein klein wenig reduzieren, ohne eine Nebenbedingung zu verletzen.

    ◦ Dies würde den Profit des Prinzipals erhöhen.

◇ Vernachlässigt man zunächst AV_L (sozusagen doppelt abgeschwächtes Problem) und setzt die AV_H in die Zielfunktion ein, so bekommt man die Mengen im Lemma.

◇ Man kann nun leicht verifizieren, dass diese Mengen die vernachlässigte AV_L erfüllen.

- Ist u_0 kleiner als die im Lemma angegebene Grenze, so muss IR_H im Optimum binden.

 ◇ Die Lösung für dieses Problem ist wie folgt.

LEMMA 1.15 *Unter der Bedingung, dass IR_H bindet ($u_H = 0$), sind die optimalen Mengen des optimalen Vertrages in Abhängigkeit von u_0 gegeben durch:*

◇ $0 \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_H^{FB}$: $\quad q_L^* = q_L^{FB}, \quad q_H^* = u_0/(\theta_H - \theta_L)$;

◇ $(\theta_H - \theta_L)q_H^{FB} \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_L^{FB}$: $\quad q_L^* = q_L^{FB}, \quad q_H^* = q_H^{FB}$;

◇ $(\theta_H - \theta_L)q_L^{FB} < u_0 < \infty$: $\quad q_L^* = u_0/(\theta_H - \theta_L), \quad q_H^* = q_H^{FB}$.

- Das Argument ist wie folgt.

 ◇ Für $u_H = 0$ vereinfachen sich die obigen Nebenbedingungen zu

$$(\theta_H - \theta_L)q_H \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_L \qquad (*),$$

 wobei die linke Ungleichung AV_L und die rechte AV_H ist.

 ◇ Beachte nun, dass durch $u_H = 0$ und $u_L = u_0$, der Nutzen des Agenten schon festgelegt ist.

 ◇ Was auch immer der Handelsüberschuss, der Prinzipal muss also lediglich diesen fixen Betrag an den Agenten abtreten.

 ◇ Also will er die Mengen so wählen, dass der Handelsüberschuss maximal groß wird.

 ◇ Er maximiert also den Handelüberschuss unter der Nebenbedingung $(*)$.

 ◇ Diese Optimierung liefert die Mengen im Lemma.

- Durch Vergleich der Lemmata 1.12, 1.14 und 1.15 erhalten wir den optimalen Vertrag.

 ◇ Es gibt 5 verschiedende Fälle, je nachdem wie hoch u_0 ist:

LEMMA 1.16 *Der optimale Vertrag bei einer Alternativoption u_0 des Typs θ_L weist die folgenden optimalen Mengen q_L^* und q_H^* in Abhängigkeit von $u_0$auf:*

◇ *Fall 1:* $0 \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_H^{SB}$:

- ∘ $q_L^* = q_L^{FB}, \quad q_H^* = q_H^{SB}.$ *(AV_L und IR_H binden.)*

◇ *Fall 2:* $(\theta_H - \theta_L)q_H^{SB} \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_H^{FB}$:

- ∘ $q_L^* = q_L^{FB}, \quad q_H^* = u_0/(\theta_H - \theta_L).$ *(AV_L, IR_H und IR_L binden.)*

◇ *Fall 3:* $(\theta_H - \theta_L)q_H^{FB} \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)q_L^{FB}$:

- ∘ $q_L^* = q_L^{FB}, \quad q_H^* = q_H^{FB}.$ *(IR_H und IR_L binden.)*

◇ *Fall 4:* $(\theta_H - \theta_L)q_L^{FB} \leq u_0 \leq (\theta_H - \theta_L)\tilde{q}_L$:

- ∘ $q_L^* = u_0/(\theta_H - \theta_L), \quad q_H^* = q_H^{FB}.$ *(IR_H, IR_L und AV_L binden.)*

◇ *Fall 5:* $(\theta_H - \theta_L)\tilde{q}_L \leq u_0 < \infty$.

- ∘ $q_L^* = \tilde{q}_L, \quad q_H^* = q_H^{FB}.$ *(IR_H und AV_L binden.)*

• Insbesondere ist Fall 5 interessant.

◇ Dort erhalten wir in gewisser Weise genau die gegenteiligen Eigenschaften des optimalen Vertrages aus dem Grundmodell.

◇ Die Menge des *ineffizienten* Typs ist die First–Best Menge.

◇ Die Menge des effizienten Typs ist ineffizient zu groß und nach *oben* verzerrt: $q_L^* > q_L^{FB}$.

◇ Relativ zu seiner Alternativoption bekommt im Fall (ii) nun der ineffiziente Typ eine Informationsrente: $u_H > 0$.

• Der Grund hierfür ist wie folgt:

◇ Wenn u_0 groß ist, dann muss man dem effizienten Typen einen sehr hohen Transfer bieten, damit er partizipiert.

◇ Dadurch wird es für den ineffizienten Typ attraktiv zu behaupten, er sei der effiziente Typ:

∘ Obwohl ihn die Produktion der Menge q_L mehr kostet als den effizienten Typ, kann er sich wegen des hohen Transfers dadurch eine Rente sichern.

◇ Also muss der Prinzipal dem ineffizienten Typen eine positive Rente zahlen, damit dieser sich wahrheitsgemäß offenbart.

• Man spricht von “gegenläufigen Anreizen” (countervailing incentives), wenn die bindende Anreizbedingung diejenige ist, welche den ineffizienten Typen davon abhält, einen effizienten zu imitieren.

1.8 Versicherungsverträge

- Wir betrachten nun einen Prinzipal, der einem Agenten einen Versicherungsvertrag verkauft.
  - Der Agent hat private Information über sein Risiko, einen Schaden zu erleiden.
- Das Modell weicht nun vom Grundmodell ab, da wir einen *risikoaversen* Agenten betrachten.
- Der Agent besitzt einen Vermögenswert, der einem Schadensrisiko ausgesetzt ist.
  - Falls kein Schaden eintritt, beträgt der Vermögenswert w;
  - Falls ein Schaden eintritt, beträgt der Vermögenswert $w-s$;
- Es gibt zwei Typen von Agenten: $\theta \in \{\theta_L, \theta_H\}$, $0 \leq \theta_L < \theta_H \leq 1$.
  - Hier ist θ die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Schaden eintritt.
  - Der Typ θ_L ist also einem niedrigeren Risiko ausgesetzt als Typ θ_H.
- Der Agent hat eine von Neumann-Morgenstern Nutzenfunktion $u(\cdot)$.
  - Für u gilt, dass $u' > 0$ und $u'' < 0$ (Risikoaversion).
  - Der Erwartungswert eines nichtversicherten Agenten vom Typ θ_i, $i \in \{L, H\}$ beträgt also

$$\bar{u}_i = \theta_i u(w-s) + (1-\theta_i) u(w).$$

  - Dies entspricht dem (typabhängigen) Reservationsnutzen des Agenten, wenn er unversichert bleibt.
  - Beachte: $\bar{u}_L > \bar{u}_H$.
- Der Prinzipal ist risiko-neutral und ist somit bereit, einen Teil des Risikos des Agenten zu tragen.
  - Eine Rechtfertigung besteht in der Interpretation, dass der Prinzipal Verträge an ein Kontinuum identischer Agenten anbietet, deren Risiko unabhängig voneinander ist.
  - Nach dem Gesetz der großen Zahlen ist dann der Durchschnittsgewinn nicht zufallsabhängig.
- Ein Versicherungsvertrag besteht aus:
  - einer Prämie $\pi \geq 0$ vom Agent an den Prinzipal, und
  - einer Leistung $\ell \geq 0$, die im Schadensfall vom Prinzipal an den Agenten bezahlt wird.
  - Wir bezeichnen einen Vertrag mit $z = (z_1, z_2)$ wobei

$$z_1 = w - \pi + \ell - s, \quad z_2 = w - \pi$$

die induzierten Vermögenswerte mit Versicherung sind.

⋄ Es gilt: $\pi = w - z_2$, $\quad \ell = z_1 - z_2 + s$.

• Der Nutzen des Agenten vom Typ θ_i aus dem Vertrag z ist:

$$U_i(z) = \theta_i u(z_1) + (1-\theta_i)u(z_2).$$

• Der erwartete Gewinn des Prinzipals, wenn der Typ θ_i ist, beträgt

$$G(\pi, \ell) = \theta_i(\pi - \ell) + (1-\theta_i)\pi = \pi - \theta_i \ell.$$

⋄ In termini von z: $\quad G(z_1, z_2) = \theta_i[w - z_1 - s] + (1-\theta_i)[w - z_2]$.

∘ Im Schadensfall ist das gesamte zu verteilende Vermögen $w - s$:

Davon bekommt der Agent z_1, der Prinzipal den Rest.

∘ Im Nicht-Schadensfall ist das gesamte zu verteilende Vermögen w:

Davon bekommt der Agent z_2, der Prinzipal den Rest.

1.8.1 Symmetrische Information

• Unter symmetrischer Information kennt der Prinzipal den Typ θ_i.

⋄ Er maximiert seinen Gewinn unter der Nebenbedingung, dass der Agent den Vertrag annimmt:

$$\max_{(z_1,z_2)} G(z_1, z_2) \quad s.d. \quad \theta_i u(z_1) + (1-\theta_i)u(z_2) \geq \bar{u}.$$

• Die Nebenbedingung bindet im Optimum (sonst Prämie leicht erhöhen).

• Bedingung erster Ordnung via Lagrange:

$$\begin{aligned} z_1: \qquad & -\theta_i - \mu\theta_i u'(z_1) &= 0, \\ z_2: \qquad & -(1-\theta_i) - \mu(1-\theta_i)u'(z_2) &= 0, \end{aligned}$$

⋄ $\mu \leq 0$: Lagrange–Multiplikator.

⋄ Also folgt: $z_1 = z_2$.

LEMMA 1.17 *Unter symmetrischer Information bietet der Prinzipal einen Vertrag an, der den Agent vollständig versichert.*

- Beachte: der Agent erhält gerade seinen Reservationsnutzen.
  - ⋄ Also ist der Nutzen von Typ θ_L höher als der von Typ θ_H.

1.8.2 Asymmetrische Information

- Wir betrachten nun den Fall, dass der Typ des Agenten dessen private Information ist.
- Gemäß dem Revelationsprinzip ist der optimale Vertrag dann in der Menge der anreizverträglichen, individuell rationalen Verträge $\{(z_{1L}, z_{2L}), (z_{1H}, z_{2H})\}$:

$$
\begin{aligned}
AV_L: \quad & \theta_L u(z_{1L}) + (1-\theta_L)u(z_{2L}) && \geq \theta_L u(z_{1H}) + (1-\theta_L)u(z_{2H}); \\
AV_H: \quad & \theta_H u(z_{1H}) + (1-\theta_H)u(z_{2H}) && \geq \theta_H u(z_{1L}) + (1-\theta_H)u(z_{2L}); \\
IR_L: \quad & \theta_L u(z_{1L}) + (1-\theta_L)u(z_{2L}) && \geq \bar{u}_L; \\
IR_H: \quad & \theta_H u(z_{1H}) + (1-\theta_H)u(z_{2H}) && \geq \bar{u}_H.
\end{aligned}
$$

- Das Problem des Prinzipals ist also

$$\max_{(z_{1L}, z_{2L}), (z_{1H}, z_{2H})} \nu_L G(z_{1L}, z_{2L}) + \nu_H G(z_{1H}, z_{2H}) \quad s.d. \quad AV_L,\ AV_H,\ IR_L,\ IR_H.$$

- Der Vertrag unter symmetrischer Information ist nicht anreizverträglich, denn:
  - ⋄ Typ θ_H würde den für den Typ θ_L vorgesehenen Vertrag präferieren.
  - ⋄ Dies legt nahe, dass im Optimum nur die Bedingung AV_H relevant ist.
- Wir betrachten daher das gelockerte Problem:

$$\max_{(z_{1L}, z_{2L}), (z_{1H}, z_{2H})} \nu_L G(z_{1L}, z_{2L}) + \nu_H G(z_{1H}, z_{2H}) \quad s.d. \quad AV_H,\ IR_L,\ IR_H.$$

LEMMA 1.18 *In der Lösung des gelockerten Problems binden AV_H und IR_L, und IR_H ist automatisch erfüllt.*

  - ⋄ Idee: IR_L ist äquivalent zu

$$\theta_L[u(z_{1L}) - u(w-s)] + (1-\theta_L)[u(z_{2L}) - u(w)] \geq 0.$$

  - ⋄ Die erste eckige Klammer ist positiv, die zweite negativ.
  - ⋄ Also gilt die Ungleichung erst recht, wenn wir θ_L durch θ_H ersetzen.

  - ⋄ Das heißt aber: $\theta_H u(z_{1L}) + (1-\theta_H)u(z_{2L}) \geq \bar{u}_H$.
  - ⋄ Zusammen mit AV_H impliziert dies IR_H.
  - ⋄ Nun binden AV_H und IR_L im Optimum, denn sonst könnte man die Prämien leicht erhöhen.

- Das gelockerte Problem ist also äquivalent zu:

$$\max_{(z_{1L},z_{2L}),(z_{1H},z_{2H})} \nu_L(\theta_L[w-z_{1L}-s]+(1-\theta_L)[w-z_{2L}]) \; + \; \nu_H(\theta_H[w-z_{1H}-s]+(1-\theta_H)[w-z_{2H}]) \quad s.d.$$

$$\begin{aligned} \theta_H u(z_{1H}) + (1-\theta_H)u(z_{2H}) &= \theta_H u(z_{1L}) + (1-\theta_H)u(z_{2L}), \\ \theta_L u(z_{1L}) + (1-\theta_L)u(z_{2L}) &= \bar{u}_L. \end{aligned}$$

- Bedingung erster Ordnung via Lagrange. Für Typ θ_H:

$$\begin{aligned} z_{1H}: \quad & -\nu_H\theta_H - \mu\theta_H u'(z_{1H}) = 0, \\ z_{2H}: \quad & -\nu_H(1-\theta_H) - \mu(1-\theta_H)u'(z_{2H}) = 0. \end{aligned}$$

  - ⋄ $\mu < 0$: Lagrange–Multiplikator.
  - ⋄ Also folgt: $z_{1H} = z_{2H}$.
  - ⋄ Vollversicherung für Typ θ_H.

- Bedingung erster Ordnung für Typ θ_L:

$$\begin{aligned} z_{1L}: \quad & -\nu_L\theta_L + \mu\theta_H u'(z_{1L}) - \lambda\theta_L u'(z_{1L}) = 0, \\ z_{2L}: \quad & -\nu_L(1-\theta_L) + \mu(1-\theta_H)u'(z_{2L}) - \lambda(1-\theta_L)u'(z_{2L}) = 0. \end{aligned}$$

  - ⋄ $\lambda < 0$: Lagrange–Multiplikator.

- Es gilt: $z_{1L} < z_{2L}$.
  - ⋄ Argument: $\theta_L < \theta_H$ impliziert:

$$\begin{aligned} -\nu_L\theta_L + \mu\theta_L u'(z_{1L}) - \lambda\theta_L u'(z_{1L}) &> 0, \\ -\nu_L(1-\theta_L) + \mu(1-\theta_L)u'(z_{2L}) - \lambda(1-\theta_L)u'(z_{2L}) &< 0. \end{aligned}$$

  - ⋄ Beide Ungleichungen zusammen liefern: $(\mu-\lambda)[u'(z_{1L}) - u'(z_{1H})] > 0$.
  - ⋄ Außerdem impliziert die erste Ungleichung: $\mu - \lambda > \nu_L/u'(z_{1L}) > 0$.

- ◇ Also: $u'(z_{1L}) > u'(z_{2L})$.
- ◇ Also: $z_{1L} < z_{2L}$, da u konkav, also u' fallend.

LEMMA 1.19 *Unter asymmetrischer Information wird der Agent mit dem hohen Risiko vollständig versichert. Der Agent mit dem niedrigen Risiko erhält nur eine partielle Versicherung (bzw. eine Versicherung mit Eigenbeteiligung).*

- ◇ Noch Überprüfen, dass AV_L erfüllt ist (einfach).

- Eigenbeteiligungen können also als ein Instrument des Versicherers angesehen werden, Preisdiskriminierung zu betreiben, bzw. gute und schlechte Risiken auseinanderzusortieren.
- Im optimalen Second–Best Vertrag erhält der Typ θ_L eine ineffizient geringe Versicherung.
  - ◇ Der Grund ist ähnlich wie im Modell mit gegenläufigen Anreizen.
  - ◇ Da der Typ θ_L einen hohen Reservationsnutzen hat, muss der Prinzipal diesem Typ relativ gute Konditionen bieten, damit dieser partizipiert.
  - ◇ Dies macht es tendenziell für den Typ θ_H attraktiv, sich als Typ θ_L auszugeben.
  - ◇ Um dies zu verhindern, verzerrt der Prinzipal den Vertrag für den Typ θ_L.
- Man kann zeigen, dass die Partizipationsbedingung für Typ θ_H manchmal mit Gleichheit erfüllt ist.
  - ◇ Ist ν_H niedrig, so ist IR_H mit Ungleichheit erfüllt. Typ θ_H bekommt eine Informationsrente.
  - ◇ Ist ν_H hoch, so ist IR_H mit Gleichheit erfüllt. Typ θ_H bekommt keine Informationsrente.
- Man kann das Modell auch für den Fall betrachten, dass unter den Versicherern vollständige Konkurrenz herrscht.
  - ◇ Modell von Rothschild und Stiglitz.
  - ◇ Methodologisch ist die Analyse etwas anders aber die Resultate sind qualitativ ähnlich:
    - ∘ Typen mit hohem Risiko erhalten vollständige Versicherung.
    - ∘ Typen mit niedrigem Risiko erhalten unvollständige Versicherung.
    - ∘ Allerdings erhalten die Versicherten nun Renten, da die Anbieter nun Nullgewinne machen.

2 Moralisches Risiko

2.1 Das Grundmodell

- Es gibt einen Prinzipal und einen Agent.

2.1.1 Technologie und Präferenzen

- Der Prinzipal delegiert die Erledigung einer Aufgabe an den Agent.
- Der Agent wählt ein Aufwands- bzw. Sorgfaltsniveau $e \in \{0, 1\}$.
  - ⋄ Hoher Aufwand $e = 1$ verursacht Kosten in Höhe von $\psi > 0$.
  - ⋄ Geringer Aufwand $e = 0$ verursacht keine Kosten.
  - ⋄ Kostenfunktion: $\Psi(e) = \psi \cdot e$.
- Der Prinzipal erhält einen Output $S \in \{S_L, S_H\}$, $0 < S_L < S_H$.
  - ⋄ Aufwand e und Output S sind stochastisch miteinander verknüpft:

$$P[S = S_H \mid e = 0] = \pi_0, \quad P[S = S_H \mid e = 1] = \pi_1.$$

  - ⋄ Hier gilt: $0 \leq \pi_0 < \pi_1 \leq 1$.
  - ⋄ Ein hoher Aufwand erhöht also die Wahrscheinlichkeit eines hohen Outputs.
- Der Nutzen der Parteien setzt sich zusammen aus (Brutto-)Nutzen/Kosten der Transaktion und Geld.
  - ⋄ Erhält der Agent einen Geldtransfer t vom Prinzipal und wählt Aufwand e und realisiert sich der Output S, so beträgt der Nutzen für den Prinzipal und den Agent jeweils

$$\begin{aligned} u_P(S,t) &= S - t, \\ u_A(e,t) &= u(t) - \Psi(e). \end{aligned}$$

  - ⋄ Hier: $u(0) = 0$, $u' > 0$, $u'' \leq 0$.
  - ⋄ Im Unterschied zum Grundmodell mit adverser Selektion kann der Agent also risikoavers sein!
- Falls es zu keiner Transaktion kommt, erhalten beide Parteien jeweils ihren Reservationsnutzen $\bar{u}_P$ und $\bar{u}_A$, die beide auf Null normiert sind.

2.1.2 Information

- Wir nehmen an, dass der Output S und die Transfers t kontrahierbar sind.
- In Bezug auf e unterscheiden wir zwei Fälle.
  - ⋄ Unter *kontrahierbarem* Aufwand ist der Aufwand e vertraglich kontrahierbar.
  - ⋄ Unter *nicht-kontrahierbarem* Aufwand ist der Aufwand e nur vom Agenten beobachtbar.
    - ∘ Der Agent kann in diesem Fall e frei wählen.
    - ∘ e ist private Information des Agenten.
    - ∘ Man sagt: es liegt "Moralisches Risiko" vor.

2.1.3 Verträge

- Ein Vertrag ist eine rechtlich bindende Vereinbarung zwischen Prinzipal und Agent.
  - ⋄ Ist e kontrahierbar, so spezifiziert ein Vertrag eine Zahlung t in Abhängigkeit von S und e.
  - ⋄ Ist e nicht-kontrahierbar, so spezifiziert ein Vertrag eine Zahlung t in Abhängigkeit nur von S.
    - ∘ Für diesen Fall ist ein Vertrag gerade ein Paar (t_H, t_L), wobei:
    - ∘ $t_H =$ Zahlung wenn $S = S_H$; $t_L =$ Zahlung wenn $S = S_L$.

2.1.4 Zeitablauf

- Die Interaktion zwischen dem Prinzipal und dem Agent vollzieht sich wie folgt:

1. Der Prinzipal offeriert einen Vertrag.
2. Der Agent nimmt an oder lehnt ab.
   - ⋄ Falls er ablehnt, erhalten beide Parteien ihren Reservationsnutzen.
   - ⋄ Falls er annimmt, wählt der Agent einen Aufwand e.
3. Der Output S realisiert sich, und die Vertragsbedingungen werden entsprechend implementiert.

2.1.5 Optimaler Vertrag mit kontrahierbarem Aufwand

- Betrachten wir zunächst den Fall mit kontrahierbarem Aufwand.

- Da ein Vertrag den Aufwand festlegen kann, muss nur die Partizipation des Agenten sicher gestellt werden.
- Wir zerlegen das Optimierungsproblem des Prinzipals in zwei Schritte.
  - ⋄ Schritt 1: was ist der optimale Vertrag für *gegebenen* Aufwand?
  - ⋄ Schritt 2: welcher Vertrag ist optimal über alle Aufwandsniveaus hinweg?
- Bei einem Aufwand von e, muss der Vertrag (t_H^e, t_L^e) die folgende Partizipationsbedingung erfüllen:

$$IR_e: \qquad \pi_e u(t_H^e) + (1-\pi_e)u(t_L^e) - \psi e \geq 0.$$

- Das Problem des Prinzipals zur Implementierung von e ist also:

$$\max_{(t_L^e, t_H^e)} \pi_e(S_H - t_H^e) + (1-\pi_e)(S_L - t_L^e) \quad s.d. \quad IR_e.$$

LEMMA 2.1 *Sei (t_L^e, t_H^e) der optimale Vertrag für gegebenen, kontrahierbaren Aufwand e.*

(i) Dann bindet die Partizipationsbedingung, und die Transfers sind bei beiden Outputniveaus gleich:

$$t_H^e = t_L^e = t^{FB} = u^{-1}(\psi e).$$

Der Agent wird also vollständig *versichert.*

(ii) Der Vertrag mit hohem Aufwand ist optimal genau dann, wenn gilt:

$$(\pi_1 - \pi_0)(S_H - S_L) \geq u^{-1}(\psi).$$

- Das ökonomische Grundproblem ist wie folgt.
  - ⋄ Ein gegebener Aufwand e führt mit einer bestimmten Wkt zu hohem oder niedrigem Output.
    - ∘ Es gibt also Outputschwankungen bzw. Risiko in Bezug auf den Output.
  - ⋄ Der Vertrag legt fest, wie der Output in den beiden Zuständen aufgeteilt wird.
  - ⋄ Mit anderen Worten: jeder Vertrag bestimmt die Aufteilung des Outputrisikos zwischen den Parteien.
    - ∘ Behält der Prinzipal immer einen festen Betrag des Outputs, so trägt der Agent das volle Risiko.
    - ∘ Zahlt der Prinzipal dem Agenten immer einen festen Betrag des Outputs, so trägt der Prinzipal das volle Risiko.
  - ⋄ Nun ist aber der Prinzipal risikoneutral.
    - ∘ Also ist ihm egal, wie viel Risiko er trägt.

    - ∘ Alles, was für ihn zählt (bei gegebenem e), ist die *erwartete* Zahlung an den Agent.
  - ⋄ Der Agent hingegen ist risikoavers.
    - ∘ Er präferiert also möglichst geringe Schwankungen in den Transfers.
    - ∘ Mit anderen Worten: Der Agent hat eine Zahlungsbereitschaft für Versicherung.
  - ⋄ Die günstigste Art, die Partizipation des Agenten zu erreichen, ist damit, dass der Prinzipal das Risiko voll trägt und den Agenten vollständig versichert.
    - ∘ Ansonsten könnte der Prinzipal den Agenten ein wenig mehr versichern, und die resultierende Nutzenerhöhung des Agenten in Form geringerer erwarteter Zahlungen abschöpfen.

- Ob der optimale Vertrag nun hohen oder niedrigen Aufwand festlegt, hängt dann einfach von den technologischen Parametern (wie etwa Aufwandskosten) ab.

- Der optimale Vertrag ist Pareto–effizient.
  - ⋄ Es gibt keine Möglichkeit, eine Partei besser zu stellen, ohne der anderen zu schaden.
  - ⋄ Daher bezeichnen wir die Lösung auch mit “First–Best”.

- Bemerkung: ist der Agent risikoneutral, so bleibt der dargestellte Vertrag optimal.
  - ⋄ Allerdings ist der optimale Vertrag nun nicht mehr eindeutig.
  - ⋄ Jeder Vertrag, der die gleiche erwartete Zahlung induziert wie der dargestellte Vertrag, ist optimal.

2.2 Nicht–kontrahierbarer Aufwand

- Wenn Aufwand nicht vertraglich festgelegt werden kann, muss der Agent motiviert werden, hohen Aufwand zu liefern.

- Will der Prinzipal einen Aufwand e implementieren, so muss der Vertrag (t_H, t_L) die folgende Anreizbedingung erfüllen:

$$AV_e: \qquad \pi_e u(t_H) + (1-\pi_e)u(t_L) - \psi e \geq \pi_{\hat{e}} u(t_H) + (1-\pi_{\hat{e}})u(t_L) - \psi \hat{e} \quad \text{für } e \neq \hat{e}.$$

  - ⋄ Diese Bedingung stellt sicher, dass der Agent auch tatsächlich den gewünschten Aufwand wählt.
  - ⋄ Will der Prinzipal, dass der Agent hohen Aufwand wählt, so muss er ihn belohnen für den Fall, dass der Output hoch ist: $t_H > t_L$.

◇ Dies folgt, da $\pi_1 > \pi_0$ und $u' > 0$.

• Ein Vertrag der AV_e und IR_e erfüllt, heißt auch anreizzulässig für e.

◇ Man sagt: der Vertrag implementiert den Aufwand e.

• Wir zerlegen das Optimierungsproblem des Prinzipals wieder in zwei Schritte.

◇ Schritt 1: was ist der optimale Vertrag, der einen *gegebenen* Aufwand e implementiert?

◇ Schritt 2: welcher Vertrag ist optimal über alle Aufwandsniveaus hinweg?

• Das Problem des Prinzipals zur Implementierung von e ist:

$$\max_{(t_H,t_L)} \pi_e(S_H - t_H) + (1-\pi_e)(S_L - t_L) \quad s.d. \quad AV_e, IR_e.$$

• Das folgende Lemma ist unmittelbar.

LEMMA 2.2 *Der optimale Vertrag mit nicht–kontrahierbarem Aufwand, der einen Aufwand von $e = 0$ implementiert, ist gegeben durch*

$$t_H = t_L = 0.$$

Der Nutzen des Prinzipals ist $\pi_0 S_H + (1-\pi_0)S_L$.

• Da der Agent bei einem Aufwand von Null keine Kosten hat, muss man ihm auch nichts zahlen.

• Beachte: Der optimale Vertrag, der einen Aufwand von $e = 0$ implementiert, ist der gleiche bei nicht-kontrahierbarem und kontrahierbarem Aufwand.

• Im folgenden bestimmen wir den optimalen Vertrag für drei verschiedene Fälle.

◇ Risikoneutraler Agent.

◇ Risikoaverser Agent.

◇ Risikoneutraler Agent mit beschränkter Haftung.

2.2.1 Risikoneutraler Agent

• Ein risikoneutraler Agent hat die Nutzenfunktion: $t - \psi \cdot e$.

- Ein Vertrag (t_H, t_L) implementiert also $e = 1$, wenn gilt:

$$AV_e : \qquad \pi_1 t_H + (1-\pi_1)t_L - \psi \geq \pi_0 t_H + (1-\pi_0)t_L,$$

$$IR_e : \qquad \pi_1 t_H + (1-\pi_1)t_L - \psi \geq 0.$$

LEMMA 2.3 *Sei der Agent risikoneutral. Sei (t_H^{RN}, t_L^{RN}) der optimale Vertrag mit nicht–kontrahierbarem Aufwand, der einen Aufwand von $e = 1$ implementiert. Dann binden beide Nebenbedingungen und die optimalen Transfers sind gegeben durch*

$$t_H^{RN} = \psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}, \quad t_L^{RN} = \psi - \pi_1 \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}.$$

- Die erwartete Zahlung an den Agenten ist also

$$\pi_1 t_H^{RN} + (1-\pi_1)t_L^{RN} = \psi.$$

  ⋄ Beachte: das ist die gleiche erwartete Zahlung wie im First–Best Fall mit risikoneutralem Agent.

- Bei risikoneutralem Agent erhalten wir also die First–Best Lösung.

LEMMA 2.4 *Sei der Agent risikoneutral. Der Vertrag, der einen Aufwand $e = 1$ implementiert, ist optimal genau dann, wenn gilt:*

$$(\pi_1 - \pi_0)(S_H - S_L) \geq \psi.$$

Insbesondere wird das First–Best Aufwandsniveau implementiert, und alle Parteien stellen sich genauso gut wie im First–Best.

- Unter Risikoneutralität schränkt Moralisches Risiko also die ökonomischen Möglichkeiten nicht ein.

- Eine Interpretation des optimalen Vertrages unter Risikoneutralität ist wie folgt:

  ⋄ Es ist, als würde der Prinzipal die "Firma" und damit die Rechte am Output an den Agenten ex ante verkaufen.

  ⋄ Wenn der Agent die Firma erwirbt, und einen Aufwand e leistet, ist sein Gewinn

$$\pi_e S_H + (1-\pi_e)S_L - \psi e.$$

- ⋄ Seine Zahlungsbereitschaft ist also $\max_{e\in\{0,1\}} \pi_e S_H + (1-\pi_e)S_L - \psi e$.
- ⋄ Da der Prinzipal volle Verhandlungsmacht hat, entspricht dies auch dem Preis, den der Prinzipal für die Firma verlangen wird.
- ⋄ Das führt aber zum genau gleichen ökonomischen Ergebnis wie unter dem optimalen Vertrag:
  - ∘ $e = 1$ wird genau dann gewählt, wenn: $(\pi_1 - \pi_0)(S_H - S_L) \geq \psi$.
  - ∘ In diesem Fall ist der Preis für die Firma und also der Gewinn des Prinzipals: $\pi_1 S_H + (1-\pi_1)S_L - \psi$.
  - ∘ Der Agent bekommt immer 0 in Erwartung.

2.2.2 Risikoaverser Agent

- Betrachten wir nun einen risikoaversen Agenten.
- Die Anreizbedindung zur Implementierung hohen Aufwands $e = 1$ schreibt sich:

$$AV_1: \qquad \pi_1 u(t_H) + (1-\pi_1)u(t_L) - \psi \geq \pi_0 u(t_H) + (1-\pi_0)u(t_L).$$

LEMMA 2.5 *Sei der Agent risikoavers. Sei* (t_H^{SB}, t_L^{SB}) *der optimale Vertrag mit nicht–kontrahierbarem Aufwand, der einen Aufwand von* $e = 1$ *implementiert. Dann binden beide Nebenbedingungen und die optimalen Transfers sind gegeben durch*

$$t_H^{SB} = u^{-1}\left(\psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right), \quad t_L^{SB} = u^{-1}\left(\psi - \pi_1\frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right).$$

- Will der Prinzipal hohen Aufwand implementieren, sieht er sich einem Zielkonflikt zwischen *Versicherung und Anreizen* gegenüber.
  - ⋄ Um das Risiko möglichst effizient zu teilen, sollte der Agent möglichst vollständig versichert sein.
  - ⋄ Je besser aber der Agent versichert ist, umso geringer sein Anreiz, hohen Aufwand auszuüben.
    - ∘ Denn nur eine gewisse Lohnspreizung motiviert den Agenten zu hohem Aufwand.
  - ⋄ Der optimale Vertrag weist die minimale Lohnspreizung auf, so dass der Agent gerade noch hohen Aufwand leistet (und partizipiert).
- Verglichen mit den Zahlungen im First–Best, ist die Zahlung nun höher für hohen, aber niedriger für niedrigen Output.

- $t_H^{SB} > t_H^{FB}, \quad t_L^{SB} < t_L^{FB}$.

- Die erwartete Zahlung zur Implementierung von hohem Aufwand ist höher als im First–Best.
  - Denn da u^{-1} konvex ist, impliziert die Ungleichung von Jensen:

$$\begin{aligned}
\pi_1 t_H^{SB} + (1-\pi_1) t_L^{SB} &= \pi_1 u^{-1}\left(\psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right) + (1-\pi_1) u^{-1}\left(\psi - \pi_1 \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right) \\
&\geq u^{-1}\left(\pi_1\left[\psi + (1-\pi_1)\frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right] + (1-\pi_1)\left[\psi - \pi_1 \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}\right]\right) \\
&= u^{-1}(\psi) \\
&= \pi_1 t_H^{FB} + (1-\pi_1) t_L^{FB}. \qquad (*)
\end{aligned}$$

- Der Prinzipal macht also einen geringeren Gewinn als im First–Best.
  - Dies ist ein Effizienzverlust, der auf asymmetrische Information zurückzuführen ist.

- In Schritt 2 vergleichen wir nun die beiden Verträge.

LEMMA 2.6 *Sei der Agent risikoavers. Der Vertrag mit hohem Aufwand ist optimal genau dann, wenn*

$$(\pi_1 - \pi_0)(S_H - S_L) \geq u^{-1}(\psi^{SB}),$$

wobei ψ^{SB} impliziert definiert ist als

$$u^{-1}(\psi^{SB}) = \pi_1 t_H^{SB} + (1-\pi_1) t_L^{SB}.$$

- ψ^{SB} entspricht der risikolosen Auszahlung (Sicherheitsäquivalent), welche dem Agenten den gleichen Nutzen gibt wie die riskante Auszahlung (t_H^{SB}, t_L^{SB}).
  - Wegen der obigen Ungleichung $(*)$ gilt: $\psi^{SB} > \psi$.
  - Die Bedingung im Lemma ist formal gleich wie bei kontrahierbarem Aufwand, aber die Kosten sind nun höher: $\psi^{SB} > \psi$.
  - In diesem Sinne kann ψ^{SB} wiederum als "virtuelle" Kosten interpretiert werden.

- Mit nicht–kontrahierbarem Aufwand wird die Implementierung von höherem Aufwand also teurer.
  - Daher wird der Prinzipal schon bei geringeren Kosten ψ aufhören, hohen Aufwand zu implementieren, als dies bei kontrahierbarem Aufwand der Fall wäre.

2.2.3 Nicht–kontrahierbarer Aufwand: Beschränkte Haftung

- Wir betrachten nun einen Agenten, der einer sogenannten beschränkten Haftung unterliegt.
  - ⋄ Das heißt, man kann dem Agenten nur Zahlungen bis zu einer bestimmten Grenze aufbürden.
- Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Haftungsgrenze bei Null liegt.
  - ⋄ Das heißt, die Löhne müssen dann mindestens Null sein:

$$BH: \qquad t_H \geq 0, \quad t_L \geq 0.$$

- Es ist klar, dass der optimale Vertrag zur Implementierung von geringem Aufwand durch $t_H = t_L = 0$ gegeben ist.
- Das Problem des Prinzipals zur Implementierung von hohem Aufwand ist:

$$\begin{aligned}
&\max_{(t_H,t_L)} \pi_1(S_H - t_H) + (1-\pi_1)(S_L - t_L) \qquad s.d.\\
&AV_1: \qquad \pi_1 t_H + (1-\pi_1)t_L - \psi \geq \pi_0 t_H + (1-\pi_0)t_L;\\
&IR: \qquad \pi_1 t_H + (1-\pi_1)t_L - \psi \geq 0;\\
&BH: \qquad t_H \geq 0, \quad t_L \geq 0.
\end{aligned}$$

- Offenbar implizieren BH und AV_1 schon die Bedingung IR.
- Außerdem muss im Optimum $t_L = 0$ gelten:
  - ⋄ Da AV_1 nur von der Differenz der Löhne abhängt, wäre es andernfalls profitabel, t_L und t_H gleichmäßig ein wenig zu senken.
- Schließlich muss im Optimum auch AV_1 binden (denn sonst wäre es profitabel, t_H ein wenig zu senken.)
- Damit folgt:

LEMMA 2.7 *Sei der Agent risikoneutral und unterliege beschränkter Haftung. Sei (t_H^{BH}, t_L^{BH}) der optimale Vertrag mit nicht-kontrahierbarem Aufwand, der einen Aufwand von $e = 1$ implementiert. Dann gilt*

$$t_L^{BH} = 0, \qquad t_L^{BH} = \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0}.$$

Der Agent erhält eine positive Rente (die sogenannte Rente aus beschränkter Haftung*) in Höhe von*

$$U^{BH} = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0} - \psi = \pi_0 \frac{\psi}{\pi_1 - \pi_0} > 0.$$

- Im Unterschied zum Fall mit einem risikoneutralen Agent und kontrahierbarem Aufwand bzw. ohne beschränkte Haftung, muss der Prinzipal nun eine Rente zahlen, um den Agent zu motivieren.
  - ⋄ Die Notwendigkeit einer Rentenzahlung entsteht also daraus, dass sowohl "Moralisches Risiko" (nicht kontrahierbarer Aufwand) und beschränkte Haftung vorliegt.
- Im nächsten Schritt vergleichen wir nun wiederum die Verträge, die jeweils hohen bzw. niedrigen Aufwand implementieren.

LEMMA 2.8 *Sei der Agent risikoneutral und unterliege beschränkter Haftung. Der Vertrag mit hohem Aufwand ist optimal genau dann, wenn*

$$(\pi_1 - \pi_0)(S_H - S_L) \geq \frac{\pi_1 \psi}{\pi_1 - \pi_0} = \psi + \frac{\pi_0 \psi}{\pi_1 - \pi_0}.$$

- Der Vergleich mit Lemma 2.4 zeigt, dass die beschränkte Haftung des Agenten dazu führt, dass hoher Aufwand seltener (erst ab einem niedrigeren Kostenniveau) implementiert wird, als im First–Best.
  - ⋄ Dies liegt daran, dass der Prinzipal nun einen Teil des Handelsüberschusses an den Agenten als Rente abgeben muss.
  - ⋄ Es liegt also eine Zielkonflikt zwischen Effizienzmaximierung und Rentenminimierung vor.